Ludwig Wittgenstein

Observaciones sobre los fundamentos de la matemática

Edición de G. Henrik von Wright,
R. Rhees y G. E. M. Anscombe

Versión española de
Isidoro Reguera

Alianza
Editorial

Título inglés:
Remarks on the Foundations of Mathematics-3rd edition
Edited by G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe.
Esta obra ha sido publicada en inglés por Basil Blackwell, Ltd. de Oxford, Inglaterra.

Calle Milán, 38, 28043 Madrid; teléf. 200 00 45
ISBN: 84-206-2496-9
Depósito legal: M. 13.619-1987
Compuesto en Fernández Ciudad, S. L.
Impreso en Lavel. Los Llanos, nave 6. Humanes (Madrid)
Printed in Spain

INDICE

PROLOGO DE LOS EDITORES

Las notas de Wittgenstein publicadas póstumamente en 1956 bajo el título de Observaciones sobre los fundamentos de la matemática, *proceden casi todas de la época que va de septiembre de 1937 a abril de 1944. En sus últimos años de vida, Wittgenstein no volvió a estos temas. De 1929 a 1934 aproximadamente, en cambio, escribió mucho sobre filosofía de la matemática y de la lógica. Una parte considerable de ello —junto con otros materiales de esos años— ha sido publicada bajo los títulos de* Observaciones filosóficas (Philosophische Bemerkungen) *(1964) y* Gramática filosófica (Philosophische Grammatik) *(1969).*

Esta nueva edición revisada de las Observaciones sobre los fundamentos de la matemática *contiene el texto* íntegro *de la primera edición (1956). Como editores, por tanto, no hemos dejado fuera nada de lo que ya estaba en la imprenta. Hemos incluido, en cambio, material adicional. Sólo las Partes II y III de la primera edición han vuelto a imprimirse aquí, como Partes III y IV, prácticamente inalteradas.*

El Apéndice II de la Parte I de la primera edición, ampliado con algunas añadiduras, pocas, tomadas de los manuscritos, lo publicamos aquí independientemente como Parte II.

Enteramente nueva es la Parte VI de la nueva edición. El manuscrito contiene, entre otras cosas, la exposición quizá más

satisfactoria del pensamiento de Wittgenstein respecto al problema de seguir una regla —uno de sus temas más recurrentes. El manuscrito (164) fue escrito en los años 1941-1944; hasta ahora no nos ha sido posible fecharlo con mayor precisión[1]*. El manuscrito, con excepción de unas pocas observaciones del final, que no encajan del todo en el círculo temático primordial, se ha imprimido aquí* in extenso.

La Parte I es la más temprana de esta colección, y en cierto modo mantiene una posición peculiar. Es la única parte escrita a máquina y la más elaborada de todas. El escrito a máquina se apoya, a su vez, en manuscritos, la mayor parte de los cuales fueron compuestos en el período que va desde septiembre de 1937 hasta aproximadamente el final de ese mismo año (117, 118, 119). Una excepción la forman, sin embargo, las observaciones sobre la negación, que proceden de un manuscrito surgido en torno al cambio de año 1933-1934 (115).

En su forma original el escrito a máquina, base de la Parte I, formaba la segunda mitad de una temprana versión de las Investigaciones filosóficas. *Esa mitad de esa versión Wittgenstein la dividió después en recortes, introduciendo numerosos cambios y adiciones, y sólo después ordenó las observaciones aisladas tal como se reproducen aquí. Todavía en un cuaderno de notas manuscrito (124) de 1944 propuso algunos cambios —pocos— respecto a este manuscrito a máquina. (Véase* infra, *p. 57, nota.)*

La última sección de la recopilación reordenada consistía en papeles que no habían sido troceados, aunque sí tenían numerosos añadidos manuscritos, y no está del todo claro si Wittgenstein la consideró perteneciente al texto que precedía. Esta sección trata del concepto de la negación y, como ya hemos dicho, fue escrita tres o cuatro años antes que el resto de la Parte I. Su contenido se encuentra en gran parte en las Investigaciones, *§§ 547-568. Los editores la habían dejado fuera en la primera edición, pero aquí la han incluido como Apéndice I de la Parte I.*

A esta recopilación se le han añadido, además, otros dos

[1] La numeración de los manuscritos y de los escritos a máquina de Wittgenstein sigue aquí la lista ofrecida en el artículo de G. V. von Wright, «The Wittgenstein's Papers», publicado en *The Philosophical Review*, vol. LXXVIII, 1969.

apéndices. Estos proceden del mismo escrito a máquina de la segunda mitad de las (primitivas) Investigaciones, *aunque estaban separados del resto de la colección de recortes. El primero trata de lo «sorprendente en la matemática». El segundo discute, entre otras cosas, las teorías de Gödel sobre la existencia de las proposiciones indemostrables, pero verdaderas, en el sistema de los* Principia Mathematica. *En la primera edición sólo incluimos el segundo apéndice, pero en ésta publicamos ambos (Apéndices II y III).*

Con excepción de unas pocas observaciones que el propio Wittgenstein dejó fuera al ordenar los recortes, la Parte I aquí publicada comprende, así, el contenido entero de la segunda parte de la primitiva versión de las Investigaciones filosóficas.

Hubo de ser intención de Wittgenstein añadir también apéndices, sobre la teoría de Cantor de la infinitud y sobre la lógica de Russell, a las contribuciones sobre problemas referentes a los fundamentos de la matemática, que había pensado incluir en las Investigaciones filosóficas. *Bajo el título de «Anexos», Wittgenstein escribió, probablemente a principios del año 1938, algunas cosas sobre problemas referentes a la teoría de conjuntos: sobre el procedimiento de la diagonal y sobre las diferentes variedades del concepto de número. Desde abril de 1938 hasta enero de 1939 compuso un cuaderno manuscrito (121) en el que, junto a otras observaciones sobre la filosofía de los conceptos psicológicos, incluyó bastantes sobre probabilidad y verdad (Gödel), así como sobre infinitud y variedades de números (Cantor). Estos apuntes los continuó inmediatamente en un block de notas (162a y comienzo de 162b). En los últimos años de la guerra volvió también ocasionalmente a estos temas. La confrontación con Cantor, sin embargo, nunca llegó a su término.*

Lo que aparece aquí publicado como Parte II consiste en los «Anexos» anteriormente mencionados (117) y en una selección de observaciones de 121. Todo ello representa una ampliación insignificante del Apéndice II de la Parte I de la antigua (1956) edición. La ordenación de las frases y parágrafos en observaciones numeradas se corresponde con el texto original (lo que no era en modo alguno el caso en la edición de 1956). Las secciones han sido numeradas por los editores.

La confrontación de Wittgenstein con Russell, es decir, con la idea de la derivabilidad de la matemática a partir del cálculo lógico,

se encuentra en la Parte III de esta colección (Parte II de la edición de 1956). Estos escritos proceden del período que va de octubre de 1939 a abril de 1940. El manuscrito (122, que continúa en la segunda mitad de 117) era el más extenso de todos los manuscritos que forman la base de esta colección. Ni en el estilo ni en el contenido ha sido perfeccionado. El autor intenta repetidamente elucidar sus ideas sobre la naturaleza de la demostración matemática: qué significa, por ejemplo, decir que una demostración ha de ser controlable; que se nos presenta con una nueva imagen; que crea un nuevo concepto; y cosas semejantes. Con ello intenta explicar «lo variopinto de la matemática» y aclarar la conexión entre diferentes técnicas de cálculo. Con este esfuerzo se enfrenta simultáneamente a la idea de una «fundamentación» de la matemática, sea en la forma de un cálculo russelliano o en la de la concepción hilbertiana de una metamatemática. Se discute pormenorizadamente la idea de contradicción y la de una demostración de consistencia.

Los editores fueron de la opinión de que este manuscrito contenía un cúmulo de valiosas ideas, tales como no se encuentran en ninguna otra parte en los escritos de Wittgenstein. Pero, por otro lado, también les resultaba claro que este manuscrito no podía ser publicado sin acortarlo. Por eso, una selección resultaba indispensable. La tarea fue difícil, y los editores no están del todo satisfechos del resultado.

En el otoño de 1940 Wittgenstein volvió a ocuparse de nuevo de la filosofía de la matemática y escribió algunas cosas sobre la cuestión de seguir una regla. Estos escritos (manuscrito 123) no se publican aquí. En mayo de 1941 reemprendió el trabajo y ello le condujo pronto a investigaciones, de las que una considerable selección aparece publicada aquí como Parte VII.

La primera parte de la Parte VII (§§ 1-23) fue escrita en su mayoría en junio de 1941. En ella se discute la relación entre proposiciones matemáticas y empíricas, entre cálculo y experimento, vuelve a tratar del concepto de contradicción y de consistencia, y termina en las cercanías del problema de Gödel. La segunda mitad fue escrita en la primavera de 1944. Trata fundamentalmente del concepto de seguir una regla, de la demostración matemática e inferencia lógica, y de la conexión entre demostración y formación de conceptos en matemática. Hay aquí numerosos puntos de

contacto, por una parte, con los manuscritos del período intermedio (Partes IV y V) y, por otra, con ideas de las Investigaciones filosóficas. *§§ 47-60 esencialmente forman una versión primitiva de lo que ahora puede encontrarse en* Investigaciones *§§ 209 a 237. La secuencia de las observaciones es aquí diferente; y algunas no han sido recogidas en la versión posterior. Ambas mitades de esta Parte VII estaban en el mismo manuscrito (124), lo que es un indicio de que el autor las consideraba afines.*

La Parte V está tomada de dos manuscritos (126 y 127) pertenecientes a los años 1942 y 1943 —mientras que la Parte IV deriva principalmente de un manuscrito (125) del año 1942 con algunos añadidos sacados de los dos manuscritos en los que se basa la Parte V. Mucho de esas dos partes tiene el carácter de «estudios preliminares» para la segunda mitad de la Parte VII; pero contienen también un cúmulo de materiales que el autor no usó allí.

En la Parte V Wittgenstein discute temas conectados con Brouwer y el intuicionismo: la ley del tercio excluso y la existencia matemática; el corte de Dedekind y el modo extensional e intensional de ver las cosas en la matemática. En la segunda mitad de esa parte hay observaciones sobre el concepto de generalidad en matemática y especialmente sobre un tema que aparece con mayor fuerza en la Parte VII: el papel de la formación de conceptos y la relación entre concepto y verdad en matemáticas.

El ordenamiento cronológico del material tuvo como consecuencia el que un mismo tema se trate a veces en diferentes lugares. Si Wittgenstein hubiera hecho con sus observaciones un libro, probablemente hubiera evitado algunas de estas repeticiones.

Hay que recalcarlo una vez más: la Parte I, y prácticamente también la Parte VI, pero sólo ellas, son reproducciones completas de textos de Wittgenstein. Por tanto, lo que aquí aparece publicado como Parte II, III, IV, V y VII es una selección *de manuscritos extensos. En su prefacio a la primera edición, los editores manifestaron su suposición de que quizá más tarde sería deseable imprimir también lo que habían omitido. Siguen siendo aún de la misma opinión —pero también de la opinión de que todavía no ha llegado el momento de imprimir todos los manuscritos de Wittgenstein sobre estos y otros temas.*

Como editores, sólo nosotros somos responsables de la numeración de los parágrafos elegidos (también en la Parte I). Pero la

articulación de los escritos en «observaciones» —separados aquí por amplios espacios vacíos— pertenece a Wittgenstein mismo. Con algunas pocas excepciones, no hemos querido interferir en el orden de las secciones. Algunas veces, sin embargo (especialmente al final de la Parte IV y V), hemos reunido material sobre el mismo tema tomándolo de lugares diversos.

El índice de contenidos y el índice analítico están pensados para ayudar al lector a obtener una perspectiva de conjunto y para hacerle más cómodo encontrar las cosas. Sólo nosotros somos responsables de la articulación temática del material, indicada en la lista de contenidos.

PARTE I

Circa 1937-1938

1. Usamos la expresión: «Los pasos vienen determinados por la fórmula...». Pero ¿cómo se usa? Podemos referirnos, por ejemplo, a que a los seres humanos la educación (adiestramiento) los lleva a usar la fórmula $y=x^2$ de tal modo que siempre que atribuyen el mismo valor a x, obtienen el mismo valor para y. O bien podemos decir: «Esas personas están de tal modo adiestradas que todas ellas, ante la orden '+3', dan el mismo paso en el mismo punto». Podemos expresar esto del siguiente modo: «La orden '+3' determina completamente para estas personas cualquier transición de un número al siguiente». (Al contrario que otras personas, que ante esa orden no saben qué tienen que hacer, o que, si bien reaccionan con seguridad ante ella, lo hacen, sin embargo, cada una de un modo diferente.)

Por otra parte, podemos contrastar diferentes tipos de fórmulas y diferentes tipos de uso (diferentes tipos de adiestramiento) apropiados a ellas. Entonces *llamamos* fórmulas de un tipo determinado (y de un modo apropiado de uso) a «fórmulas que determinan un número y para un valor dado de x», y fórmulas de otro tipo a aquellas «que no determinan el número y para un valor dado de x». ($y=x^2+1$ sería del primer tipo, $y>x^2+1$, $y=x^2\pm 1$, $y=x^2+z$, del segundo.) La proposición: «la fórmula... determina un número y» es, pues, un enunciado sobre la forma de

las fórmulas –de modo que hay que distinguir una proposición como «La fórmula que he escrito determina y», o como «He aquí una fórmula que determina y», de otras como: «La fórmula $y = x^2$ determina que el número y para un x dado». La pregunta «¿Es ésa una fórmula que determina y?» significa entonces lo mismo que: «¿Es ésa una fórmula de tal tipo, o de tal otro?»; pero no está del todo claro qué hemos de hacer con la pregunta: «¿Es $y = x^2$ una fórmula que determina y para un x dado?» Esta pregunta, por ejemplo, podríamos planteársela a un escolar para probar si entiende el uso de la expresión «determinar»; o podría tratarse de una tarea matemática: la de calcular si del lado derecho de la fórmula sólo hay una variable, como sucede, por ejemplo, en este caso: $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$.

2. «El significado que pretende darse a la fórmula determina los pasos a seguir.» ¿Cuál es el criterio para saber qué significado ha querido darse a la fórmula? El modo y manera, presumiblemente, como la usamos de continuo, como se nos enseñó a usarla.

Decimos, por ejemplo, a alguien que usa un signo desconocido para nosotros: «Si con '$x!2$' quieres significar x^2, entonces obtienes *tal* valor para y; si con ello quieres significar x, *tal otro*». Pregúntate ahora: ¿Cómo se consigue *significar* con «$x!2$» lo uno o lo otro?

Así es como el significar puede determinar los pasos previamente.

3. *¿Cómo sé yo* que, desarrollando la serie $+2$, he de escribir

«20004, 20006»

y no

«20004, 20008»?

(Una cuestión semejante: «¿Cómo sé yo que este color es 'rojo'?».)

«Pero tú sabes, por ejemplo, que siempre tienes que escribir la *misma* secuencia de números en las unidades: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, etcétera.» ¡Plenamente correcto! El problema tiene que aparecer también en esa secuencia, pero también en *esta:* 2, 2, 2, 2, etcétera.

Pues ¿cómo sé yo que tras el quincuagentésimo «2» he de escribir «2»?; es decir, ¿qué «2» es en ese lugar 'la misma cifra'? Y si lo sé *de antemano*, ¿qué me ayuda después el saberlo? Quiero decir: ¿cómo sé después, cuando ha de darse realmente el paso, qué he de hacer con aquel saber previo?

(Si se necesita una intuición para proseguir la serie +1, también se necesita, entonces, para proseguir la serie +0.)

«¿Quieres decir que la expresión '+2' te deja dudas, por ejemplo, respecto a lo que debes escribir tras 2004?»—No; yo respondo sin titubeos: «2006». Pero por eso precisamente es superfluo que ello estuviera determinado ya de antemano. El que yo no tenga duda alguna respecto a esa cuestión no significa que haya sido ya respondida antes.

«Pero sé también que, ante cualquier número que se me indique, siempre podré decir, inmediatamente y con seguridad, el siguiente.»—Con exclusión, ciertamente, del caso en que me muriera antes de llegar a hacerlo, y de otros muchos casos. Pero, naturalmente, es muy importante el que esté tan seguro de que puedo continuar.

4. «¿Dónde reside, entonces, la inexorabilidad propia de la matemática?»—¿No sería un buen ejemplo de ello la inexorabilidad con la que el dos sigue al uno, el tres al dos, etc?—Pero esto quiere decir, ciertamente: seguir la *serie de los números cardinales;* porque en otra serie distinta sigue algo diferente. ¿Y no es precisamente esa secuencia la que *define esa* serie?—«¿Quiere decir esto, pues, que todos los modos de contar son igualmente correctos, y que cada uno puede contar como quiera?»—Seguramente no llamaríamos «contar» al hecho de que cada uno dijera los números uno detrás de otro *de cualquier forma;* pero no es solamente una cuestión de nombres. Puesto que aquello que llamamos «contar» es ciertamente una parte importante de la actividad de nuestra vida. El contar, el calcular, no son, por ejemplo, un simple pasatiempo. Contar (y esto significa: contar *así*) es una técnica que se usa diariamente en las más variadas operaciones de nuestra vida. Y por eso aprendemos a contar tal como lo aprendemos: con un inacabable ejercicio, con una exactitud sin piedad; por eso se nos impone inexorablemente a

todos decir «dos» después de «uno», «tres» después de «dos», etc. «Pero ¿es sólo un *uso* ese contar? ¿No corresponde a esa secuencia también una verdad?» La *verdad* es: que el contar se ha acreditado.—«¿Quieres decir, por tanto, que 'ser-verdadero' significa ser utilizable (o provechoso)?»—No, sino que de la serie natural de los números —así como de nuestro lenguaje— no se puede decir que es verdadera, sino: que es útil y, sobre todo, *que es utilizada*.

5. «Pero ¿no se sigue, con necesidad lógica, que obtienes dos, cuando añades uno a uno, y tres, cuando añades uno a dos, etc? ¿Y no es esta inexorabilidad la misma que la de la inferencia lógica?»—'Sí! es la misma.—«Pero ¿no corresponde a una verdad la inferencia lógica? ¿No es *verdadero* que esto se sigue de esto?»—La proposición: «es verdadero que esto se sigue de esto» quiere decir simplemente: esto se sigue de esto. Y ¿cómo usamos esa proposición?—¿Qué sucedería si infiriéramos de otro modo? ¿*Cómo* entraríamos en conflicto con la verdad?

¿Cómo entraríamos en conflicto con la verdad si nuestros patrones de medida estuvieran hechos de goma muy blanda en lugar de estar hechos de madera y acero?—«Bueno, no llegaríamos a conocer la medida correcta de la mesa.»—Quieres decir que no conseguiríamos, o no conseguiríamos fielmente, *la* medida exacta que conseguimos con nuestros instrumentos rígidos de medición. Erraría, pues, *aquel* que hubiera medido la mesa con una regla elástica y afirmara que mide 1,80 m según nuestro método usual de medición; sería correcto, sin embargo, decir que la mesa mide 1,80 m según el suyo.—«¡Pero esto, entonces, ya no es medir alguno!»—Es semejante a nuestro medir y circunstancialmente puede cumplir 'fines prácticos'. (Un comerciante podría de este modo tratar distintamente a distintos clientes.)

A una regla que se dilatara extraordinariamente en caso de un mínimo calentamiento la llamaríamos —en circunstancias usuales— por este motivo *inservible*. Pero podemos imaginar circunstancias en las que precisamente esto fuera lo deseable. Me imagino que percibimos la dilatación a simple vista; y que adscribimos la misma medida numérica de longitud a cuerpos en recintos de temperaturas diferentes si alcanzan la misma longitud

sobre una regla que para el ojo unas veces es más larga y otras más corta.

En este caso puede decirse: Lo que aquí significa «medir» y «longitud» y «de igual longitud» es algo diferente a aquello que nosotros llamamos así. El uso de estas palabras es diferente aquí al nuestro; pero está *emparentado* con él, y también nosotros usamos esas palabras de diversos modos.

6. Hay que clarificar en qué consiste propiamente el inferir. Se dirá, quizá, que consiste en la transición de un aserto a otro. Pero ¿significa esto que el inferir es algo que sucede en el tránsito de un aserto a otro, es decir, *antes* de que el segundo sea expresado —o que el inferir consiste en hacer que un aserto siga a otro, es decir, por ejemplo, en expresarlo detrás del otro? Inducidos por el uso especial del verbo «inferir», nos gusta imaginar que el inferir es una actividad peculiar, un proceso en el medium del entendimiento, como si fuera una efervescencia en la niebla, de donde surge después la deducción. ¡Pero observemos lo que sucede!—Se da un paso aquí de una proposición a otra a través de otras proposiciones, o sea, por mediación de una cadena de inferencias; pero no necesitamos hablar de este paso, ya que presupone otro tipo de transición también: de un eslabón de la cadena al siguiente. Puede tener lugar, entonces, un proceso de transición entre los eslabones. Pero no hay nada oculto en este proceso; es una derivación de una sentencia a partir de otra de acuerdo a una regla; una comparación de ambas con un paradigma cualquiera que represente para nosotros el esquema del tránsito; o algo parecido. Esto puede suceder sobre el papel, oralmente o 'en la cabeza'.—Pero la conclusión puede sacarse también expresando una proposición tras otra, sin transición alguna; o bien la transición consiste sólo en que decimos «por tanto», o «de ahí se sigue», o cosas parecidas... Hablamos de «conclusión» cuando la proposición inferida *puede* derivarse efectivamente de las premisas.

7. ¿Qué significa, entonces, que una proposición *pueda* derivarse de otra por mediación de una regla? ¿No puede derivarse todo de todo, mediante *alguna* regla? —¿según una regla

convenientemente interpretada? ¿Qué significa cuando digo, por ejemplo: este número puede obtenerse de la multiplicación de aquellos dos? Se trata de una regla que dice que hemos de obtener ese número necesariamente si multiplicamos *correctamente;* y esa regla podemos obtenerla multiplicando ambos números, o también de modo diferente (aunque se podría llamar 'multiplicación' también a todo procedimiento que conduzca a ese resultado). Se dice, entonces, que he multiplicado cuando he realizado la multiplicación 265 × 463, pero también cuando digo: «4 por 2 son 8», a pesar de que en este caso ningún procedimiento de cálculo ha llevado hasta el producto (que yo también podría haber *calculado*). Y así es como decimos también que se saca una conclusión cuando no se la calcula.

8. ¡Pero yo sólo puedo inferir aquello que realmente se *sigue*!—¿Ha de significar esto: sólo aquello que se sigue de acuerdo a las reglas de inferencia; o bien: sólo aquello que se sigue de acuerdo con *ciertas* reglas de inferencia, que corresponden de algún modo a una realidad? Lo que vagamente nos ronda aquí la cabeza es que esa realidad es algo muy abstracto, muy general y muy rígido. La lógica es una suerte de ultrafísica, la descripción de la «construcción lógica» del mundo, que percibimos mediante una especie de ultraexperiencia (con el entendimiento, por ejemplo). Quizá nos ronden aquí la cabeza inferencias como ésta: «La estufa echa humo, así pues, su chimenea ha vuelto a obstruirse.» (¡Y *así* es como se saca esa conclusión! No así: «La estufa echa humo, y siempre que la estufa echa humo está su chimenea obstruida; por tanto...».)

9. Lo que llamamos 'inferencia lógica' es una transformación de una expresión. Por ejemplo, la conversión de una medida a otra. Un lado de una regla está dividido en pulgadas, el otro en centímetros. Mido la mesa en pulgadas y lo paso luego a centímetros *sobre la regla.*—Y realmente existe también lo correcto y lo falso en el paso de una medida a otra; pero ¿con qué realidad concuerda aquí lo correcto? Seguramente con una *conversión*, o con un *uso*, o acaso con las necesidades prácticas.

10. «Pero ¿no debe seguirse, por ejemplo, '*fa*' de '(*x*).*fx*', *cuando* '(*x*).*fx*' se entiende tal como nosotros lo entendemos?»—Y ¿cómo se manifiesta ese *como* nosotros lo entendemos? ¿No mediante la práctica habitual de su uso? y quizá también mediante ciertos *gestos* —y cosas similares. Pero es como si la palabra «todos», cuando *nosotros* la pronunciamos, tuviera aún algo adherido; algo con lo que un uso diferente resultara incompatible; a saber, el *significado*. «¡'Todos' quiere decir: *todos*!», decimos cuando hemos de explicar el significado; y de paso hacemos ciertos gestos y ponemos ciertas caras.

¡Corta todos esos árboles!—¿Es que no entiendes lo que quiere decir '*todos*'? (El había dejado uno en pie.) ¿Cómo ha aprendido lo que quiere decir 'todos'? Presumiblemente por la práctica.—Y, por supuesto, esa práctica no sólo ha conseguido que él, ante la orden *haga eso*, sino que ha rodeado la palabra de una multitud de imágenes (visuales y otras), de las que surge una u otra cuando oímos y pronunciamos la palabra. (Y cuando hemos de dar cuenta del 'significado' de la palabra recurrimos primero a *una* imagen sacada de esa multitud de ellas —para volver a rechazarla después como inesencial, cuando vemos que unas veces se presenta ésta, otras veces aquélla y algunas veces ninguna.)

Se aprende el significado de «todos» aprendiendo que '*fa*' se sigue de '(*x*).*fx*'.—Las prácticas que ejercitan el uso de esta palabra, que enseñan su significado, se orientan siempre a impedir que pueda producirse una excepción.

11. ¿Cómo *enseñamos*, pues, a inferir? ¿O no lo enseñamos?

¿Sabe el niño que de la doble negación se sigue la afirmación?—Y ¿cómo se le *convence* de ello? Seguramente mostrándole un proceso (una doble inversión, un doble giro de 180°, y cosas semejantes) que él adopta como imagen de la negación.

Y se clarifica el sentido de '(*x*).*fx*' insistiendo en que de ahí se sigue '*fa*'.

12. «De 'todos', cuando ello se entiende *así*, debe seguirse *esto*.»—¿Cuándo se lo entiende *cómo*? Considera cómo lo entiendes. Una imagen te ronda aún la cabeza —y eso es todo lo que

tienes—. No, no *debe* —pero se *sigue:* somos nosotros los que *consumamos* ese tránsito.

Y decimos: Si no se sigue esto, entonces no eran *todos* —y esto muestra únicamente cómo reaccionamos con palabras en una situación así.

13. Si '*fa*' no ha de seguirse ya de '$(x).fx$', nos parece, entonces, que ha tenido que cambiar algo más que el *uso* de la palabra «todos»; algo adherido a la palabra misma.

¿No es algo parecido a cuando se dice: «Si esta persona obrara de otro modo, su carácter habría de ser otro»? En ciertos casos esto puede querer decir algo y en otros no. Decimos: «del carácter dimana el modo de comportamiento» y, del mismo modo, el uso dimana del significado.

14. Esto te muestra —podría decirse— cuán estrechamente determinados gestos, imágenes, reacciones, van unidos a un uso constantemente practicado.

'La imagen se nos impone...' Es muy interesante que las imágenes se nos *impongan.* Y si no fuera así, ¿cómo podría decirnos algo una frase como «What's done cannot be undone»?

15. Es importante que en nuestro lenguaje —en nuestro lenguaje natural— 'todos' sea un concepto fundamental y 'todos excepto uno' menos fundamental; en efecto, para este último no hay *una* palabra, ni tampoco un gesto característico.

16. La *gracia* de la palabra «todos» es precisamente que no admite excepción alguna.—Sí, éste es el interés de su uso en nuestro lenguaje; pero cuáles sean los tipos de uso que sentimos como 'gracia' es algo que va ligado al papel que desempeñe ese uso en toda nuestra vida.

17. Ante la pregunta ¿en qué consiste el inferir? escuchamos respuestas como ésta: «Una vez que he admitido la verdad de las proposiciones..., estoy legitimado a escribir...».—¿Hasta qué

punto legitimado? ¿No tenía antes ningún derecho a escribirlas?—«Aquellas proposiciones me convencen de la verdad de esta proposición.» Pero, naturalmente, tampoco se trata de esto.—«El espíritu lleva a cabo, de acuerdo a estas leyes, la actividad especial de la inferencia lógica.» Esto es ciertamente interesante e importante; pero ¿es también verdadero?, ¿infiere el espíritu siempre según *estas* leyes? Y ¿en qué consiste la actividad especial del inferir?—Por eso resulta necesario contemplar cómo llevamos a cabo inferencias en la praxis; qué clase de proceso es el inferir en el juego de lenguaje.

Por ejemplo, una prescripción dice: «Todos los que midan más de 1,80 m han de reunirse en la sección...». Un secretario da lectura a los nombres de la gente, añadiendo su altura. Otro los distribuye en tales y tales secciones.—«N. N., 1,90 m.»—«Así pues, N. N. a la sección...» Esto es inferir.

18. ¿Qué llamamos, entonces, 'inferencias' en Russell o en Euclides? ¿Diré: los pasos de una proposición a la siguiente en la demostración? Pero ¿dónde está el *paso*?—Digo que en Russell una proposición se sigue de otra cuando aquélla puede ser derivada de ésta de acuerdo con la posición de ambas en una demostración y con los signos a ellas atribuidos —cuando leemos el libro. Puesto que leer este libro es un juego que hay que aprender.

19. A menudo no se tiene claro en qué consiste propiamente el seguir e inferir; qué clase de hecho o de procedimiento es. El peculiar uso de estos verbos nos sugiere que seguir es la existencia de una conexión entre proposiciones, conexión que seguimos al inferir. Esto se manifiesta muy instructivamente en la exposición de Russell (*Principia Mathematica*). El que una proposición $\vdash q$ se siga de una proposición $\vdash p \supset q \cdot p$ es aquí una ley lógica fundamental:

$$\vdash p \supset q \cdot p \cdot \supset \cdot \vdash q$$ [1]

[1] *Principia Mathematica* 9.12: What is implied by a true premiss is true. Pp. (*Nota de los editores.*)

Y esto nos legitima ahora, según se dice, para inferir $\vdash q$ de $\vdash p \supset q \cdot p$. Pero ¿en qué consiste entonces 'inferir', el procedimiento para el que se nos legitima? Precisamente en pronunciar, escribir, etcétera, una proposición tras otra como aserto en un juego de lenguaje cualquiera; y ¿cómo puede legitimarme *para esto* aquella ley fundamental?

20. Lo que Russell quiere decir es esto: «*Así* inferiré y eso es lo *correcto.*» El quiere, pues, comunicarnos cómo piensa inferir: ello se hace mediante una *regla* de inferencia. ¿Qué dice esta regla? ¿Que esta proposición implica aquélla?—Presumiblemente, que en las demostraciones de este libro una proposición así tiene que estar tras una proposición así.—¡Pero se supone que ha de ser una ley lógica fundamental el que sea *correcto* inferir así!—Entonces, la ley fundamental habría de rezar: «Es correcto inferir de... a...»; y esta ley fundamental tendría que ser presumiblemente evidente — pero en ese caso, la regla misma se nos evidenciaría como correcta o legitimada. «¡Pero esa regla trata de proposiciones en un libro, y eso no pertenece a la lógica!»—Plenamente correcto; la regla no es más, efectivamente, que una información respecto a que en este libro sólo se usa *esta* transición de una proposición a otra (como si se tratara de una información del índice); puesto que la corrección de la transición tiene que evidenciarse allí mismo donde se hace; y la expresión de la «ley lógica fundamental» es entonces la misma *secuencia de las proposiciones.*

21. Mediante esa ley fundamental Russell parece decir de una proposición: «Ya se sigue —lo único que he de hacer es inferirla.» Así sucede también con Frege cuando dice que la recta, que siempre une dos puntos, ya está propiamente allí, antes de que la tracemos; es lo mismo que cuando decimos que los pasos de la serie +2, por ejemplo, ya están propiamente dados, antes de que lo hagamos oralmente o por escrito, antes de que los demos, por así decirlo.

22. A quien dijera esto, podría replicársele: Tú usas aquí una imagen. Los pasos que alguien ha de dar en una serie *pueden determinarse* mostrándoselos de antemano. Por ejemplo, escribiendo en otra notación la serie que él ha de escribir, de modo que sólo tenga que transcribirla, o bien escribiéndosela muy fino primero, para que él la repase luego por encima. En el primer caso podemos decir también que nosotros no escribimos *la* serie que él ha de escribir, que nosotros mismos no damos, pues, los pasos de esa serie; en el segundo caso, sin embargo, diremos, ciertamente, que la serie que él ha de escribir ya está ahí de antemano. Diríamos esto también si le *dictáramos* lo que tiene que escribir, a pesar de que, en ese caso, lo que nosotros producimos es una serie de sonidos y él una serie de signos escritos. En cualquier caso, una manera segura de *determinar* los pasos que alguien ha de dar consiste en mostrárselos de algún modo previamente. Por eso, si determinamos esos pasos de un modo completamente diferente, a saber, sometiendo a nuestro escolar a un adiestramiento, tal como, por ejemplo, aprenden los niños la tabla de multiplicar y su operación, es decir, de modo que todos los que han sido así adiestrados realizan de la misma manera y con resultados concordantes multiplicaciones discrecionales que no han hecho durante su aprendizaje —si los pasos, por tanto, que uno ha de dar ante la orden '+2' están de tal modo determinados por el adiestramiento que podemos predecir con seguridad cómo procederá, aunque hasta ahora no haya dado *ese* paso nunca—, entonces puede que nos resulte natural usar como imagen de este hecho el siguiente: que los pasos están todos ya dados y él solamente los transcribe.

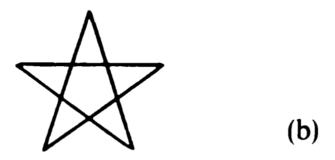
23. «¡Pero inferimos esta proposición de aquélla porque realmente se sigue de ella! Nos cercioramos de que se sigue.» Nos cercioramos de que lo que está aquí se sigue de lo que está allí. Y esta proposición se usa *temporalmente*.

24. ¡Separa los sentimientos (gestos) de concordancia de aquello que *haces* con la demostración!

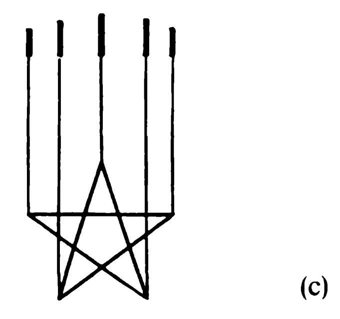
25. Pero qué sucede cuando me cercioro de que este gráfico de líneas:



es igual en número a este gráfico de ángulos:



(intencionadamente he hecho los gráficos de modo que se graben en la memoria) correlacionándolo así:

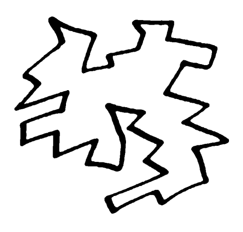


Y ahora ¿de qué me cercioro mirando esa figura? Veo una estrella con prolongaciones a modo de hilos.

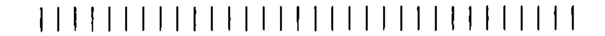
26. Pero puedo hacer este uso de la figura: Cinco personas están colocadas en un pentágono; en la pared hay varillas puestas como las rayas en (a); miro la figura (c) y digo: «puedo dar una varilla a cada una de las personas».

Podría considerar la figura (c) como una *imagen* esquemática del hecho de dar una varilla a cada una de las cinco personas.

27. Si dibujo primero un polígono discrecional cualquiera



y después una serie de rayas



podré entonces indagar si tengo arriba tantos ángulos como rayas abajo. (No sé lo que resultará de ello.) Y así puedo decir, también, que trazando líneas de proyección me he cerciorado de que en el extremo de arriba de la figura (c) hay tantas rayas como ángulos tiene la estrella de abajo. (¡Temporalmente!) Según esta interpretación, la figura no se asemeja a una demostración matemática (del mismo modo que tampoco es una demostración matemática el que yo reparta un saco de manzanas entre un grupo de gente y me encuentre con que cada uno puede recibir justamente *una* manzana).

Pero puedo interpretar la figura (c) como una demostración matemática. ¡Demos nombres a las figuras de los gráficos (a) y (b)! Llámese «mano», *M*, la figura (a); «pentágono estrellado», *P*, la figura (b). He demostrado que *M* tiene tantas rayas como *D* ángulos. Y esta proposición vuelve a ser intemporal.

28. La demostración —podríamos decir— es *una* figura en uno de cuyos extremos hay ciertas proposiciones y en el otro una proposición (a la que llamamos 'demostrada').

Podría decirse, como descripción de una figura así: que en ella la proposición... se sigue de... Esta es una forma de describir un *patrón*, que también podría ser, por ejemplo, un ornamento

(patrón de papel pintado). Puedo, entonces, decir: «En la demostración de la pizarra la proposición *p* se sigue de *q* y *r*», y esto es simplemente una descripción de lo que allí se ve. Pero no es la proposición matemática que dice que *p* se sigue de *q* y *r*. Esta tiene otro uso diferente. Dice —así podría expresarse— que tiene sentido hablar de una demostración (patrón) en la que *p* se sigue de *q* y *r*. Puede decirse que la proposición «lo blanco es más claro que lo negro» afirma que tiene sentido hablar de dos objetos, el más claro de los cuales es blanco, y el otro negro, pero no de dos objetos, el más claro de los cuales sea negro, y el otro blanco.

29. Imaginemos que hemos establecido el paradigma para «más claro» y «más oscuro» en forma de una mancha blanca y negra y que ahora —por así decirlo— deducimos con su ayuda: que el rojo es más oscuro que el blanco.

30. La proposición demostrada por (c) sirve ahora como una nueva prescripción para constatar la igual numericidad: dada una cantidad de objetos, ordenada en forma de mano, y otra, ordenada como los ángulos de un pentágono estrellado, decimos que ambas cantidades son iguales en número.

31. «Pero ¿no sucede esto únicamente porque ya hemos correlacionado *M* y *P* y visto que son iguales en número?» —Sí, pero aunque lo hayan sido en *un* caso, ¿cómo sé que volverán a serlo ahora?—«Precisamente porque en la *esencia* de *M* y *P* está el que sean iguales en número.» Pero ¿cómo pudiste averiguar *esto* por aquella correlación? (Yo pensaba que el contar, o la correlación, sólo muestran que estos dos grupos que tengo ahora ante mí son iguales —o desiguales— en número.)

«Pero si él tiene un *M* de cosas y un *P* de cosas, y los correlaciona ahora efectivamente, no es *posible* entonces que obtenga de ello otro resultado que el de que sean iguales en número. —Y que no es posible, ya lo veo yo por la demostración.» —Pero ¿no *es* posible? Cuando, por ejemplo, él —como otro podría decir— *olvida* trazar una de las líneas de correlación.

Aunque admito que, en la inmensa mayoría de los casos, siempre obtendrá el mismo resultado y que, si no lo obtuviera, se consideraría de algún modo trastornado. Y si no fuera así, toda la demostración quedaría en el aire. Nos decidimos, pues, a usar una imagen demostrativa en lugar de una correlación entre los grupos; *no* los correlacionamos, sino que, *en lugar de ello*, comparamos los grupos con los de la demostración (en la que, en efecto, se correlacionan mutuamente dos grupos.)

32. Como resultado de la demostración podría decir también: «Un *M* y *P* se llaman desde ahora 'iguales en número'».

O bien: la demostración no *investiga* la esencia de ambas figuras, sino que manifiesta aquello que, a partir de ahora, voy a considerar perteneciente a la esencia de las figuras.—Lo que pertenece a la esencia lo deposito entre los paradigmas del lenguaje.

El matemático produce *esencia.*

33. Decir «Esta proposición se sigue de aquélla» es aceptar una regla. La aceptación se produce *sobre la base* de la demostración. Es decir, considero aceptable esta cadena (esta figura) como *demostración.*—«Pero ¿podría hacer otra cosa? ¿No debo aceptarlo así en cualquier caso?»—¿Por qué dices que debes? Sólo porque al final de la demostración dices algo así como: «Sí, tengo que aceptar esta conclusión.» Pero esto no es más que la expresión de una aceptación incondicional.

Esto significa, creo yo: las palabras «tengo que admitirlo» se usan en *dos tipos* de casos: cuando hemos conseguido una demostración, pero también en referencia al paso concreto mismo de la demostración.

34. ¿Y cómo se manifiesta, entonces, que la demostración me *obliga*? Precisamente en que prosigo de tal y tal modo, en que me niego a seguir otro camino. Como último argumento contra alguien que no quisiera proceder así, sólo diría: «¿¡Cómo, es que no lo ves...!?; pero esto no es *argumento* alguno.

35. «Pero si tienes razón, ¿cómo es que todas las personas (o, por lo menos, todas las personas normales) consideran aceptables esas figuras como demostraciones de esas proposiciones?»—Sí, en efecto, he ahí una gran —e interesante— coincidencia.

36. Imagínate que tuvieras ante ti una fila de bolas; las numeras con cifras arábigas desde 1 hasta 100; después haces una gran separación cada 10; en medio de cada trozo de fila de 10, entre 5 y 5, una separación algo más pequeña —de este modo queda más claro que son 10—; ahora tomas los grupos de 10 y los colocas uno *bajo* otro, y haces en el medio de la columna una gran separación, es decir, entre cinco y cinco filas; ahora numeras las filas desde 1 hasta 10.—Se haría ejercicio, por así decirlo, con las bolas. Puedo decir que hemos desarrollado propiedades de las cien bolas.—Pero imagínate ahora que se filmara todo ese proceso, el experimento con las cien bolas. Entonces no vería en la pantalla un experimento, puesto que la imagen de un experimento no es el experimento mismo. —¡Pero lo 'matemáticamente esencial' del proceso lo veo también ahora en la proyección! Ya que ahí aparecen primero 100 manchas, después son repartidas en grupos de diez, etc.

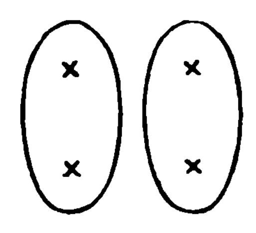
Así que podría decir: la demostración no me sirve de experimento, pero sí de imagen de un experimento.

37. Coloca 2 manzanas sobre una mesa vacía, procura que nadie se acerque y que no se mueva la mesa; coloca ahora otras 2 manzanas sobre la mesa; cuenta ahora las manzanas que hay allí. Has hecho un experimento; el resultado del recuento es probablemente 4. (Presentaríamos el resultado de este modo: si bajo tales y tales circunstancias se colocan sobre una mesa, primero dos, después otras dos manzanas, en la mayoría de los casos no desaparece ninguna, ni se añade ninguna.) Y pueden hacerse análogos experimentos, con el mismo resultado, con toda clase de cuerpos sólidos. Así es como los niños aprenden a calcular entre nosotros, puesto que se les coloca 3 habas y 3 más, y se les hace contar luego lo que ahí queda. Si de ahí resultara unas veces 5, otras 7 (por ejemplo, porque, *como diríamos ahora*, unas veces una

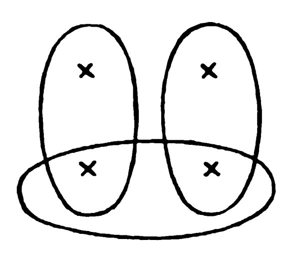
bola se añadiera, otras desapareciera, por sí misma), declararíamos en principio que las habas son inadecuadas para la enseñanza del cálculo. Pero si sucediera lo mismo con varillas, dedos, rayas y con la mayoría de las demás cosas, entonces se acabaría el cálculo.

«Pero incluso entonces, ¿no serían $2+2=4$?»—Con ello, esta pequeña proposición se habría vuelto inutilizable.

38. «Basta que contemples la figura



para ver que $2+2=4$.» Entonces basta que mires la figura



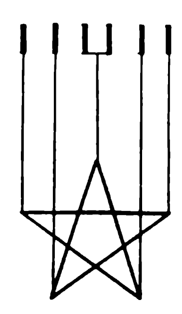
para ver que $2+2+2=4$.

39. ¿De qué convenzo yo a alguien que sigue la proyección fílmica del experimento con las cien bolas?

Se podría decir: de que esto ha sucedido así, lo cual no sería convicción matemática alguna.—Pero ¿no puedo decir: *que yo le inculco un procedimiento*? Tal procedimiento es la reagrupación de

una fila de 100 cosas en 10 filas de 10. Y este procedimiento, *de hecho*, puede volverse a realizar siempre. Y de esto, con razón, puede estar convencido.

40. Y así es como la demostración (25), trazando líneas de proyección, puede grabar en nosotros un procedimiento: el procedimiento de la correlación uno a uno para *M* y *P*.—«Pero ¿no me *convence* también de que esta[2] correlación es *posible*?» Si esto ha de significar que puedes realizarla siempre, entonces ello no tiene por qué ser verdadero en absoluto. Pero el trazar líneas de proyección nos convence de que arriba hay tantas rayas como ángulos abajo; y nos proporciona un modelo para correlacionar mutuamente tales figuras.—«Pero ¿no muestra así el modelo que eso puede hacerse? ¡Y no que en este caso se haga! En el sentido de que no podría hacerse si arriba, en lugar de |||||, apareciera la figura |||||.»—¿Cómo es eso? ¿No puede hacerse entonces? *De este modo*, por ejemplo:



¡Claro que esta figura podría usarse también como demostración de algo! Por ejemplo, para mostrar que *no* pueden correlacionarse 1-1 grupos de estas formas[3]. 'Una correlación 1-1 es aquí imposible' significa, por ejemplo: las figuras y la correlación 1-1 no cuadran juntas.

---

[2] ¿Significa aquí «esta correlación» la misma de las figuras de la demostración? Nada puede ser a la vez la medida y lo medido. (Nota al margen.)

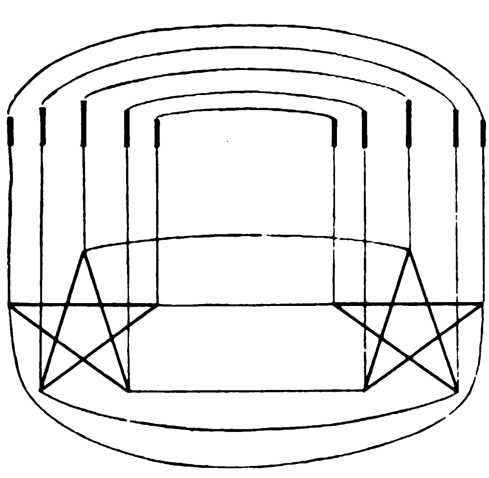
[3] Intentaré, por ejemplo, con respecto a la figura, hacer una correlación, pero no la otra, y diré que aquélla no es posible. (Nota al margen.)

«¡No pretendía eso!»—Muéstrame entonces lo que pretendías y yo lo haré.

Pero ¿cómo puedo decir entonces que la figura muestra *cómo* es posible una correlación así? —¿y no debe mostrar también, por ello, *que* esa correlación es posible?

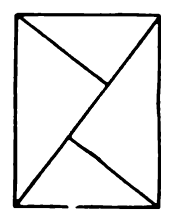
41. ¿Cuál fue, entonces, el sentido de proponer que asignáramos nombres a las formas de las cinco rayas paralelas y de la estrella de cinco picos? ¿Qué sucedió para que recibieran nombres? Algo se insinúa con ello respecto al tipo de uso de esas figuras. A saber, que de un golpe de vista se las reconoce como tales y tales. Para hacerlo no contamos sus rayas o ángulos; para nosotros son tipos formales, como cuchillos y tenedores, como letras y números.

Así pues, ante la orden: «¡Dibuja una *M*!», por ejemplo, puedo producir inmediatamente esa forma.—Así que la demostración me enseña una correlación de ambas formas. (Diría que en la demostración no sólo vienen correlacionadas esas figuras concretas, sino las *formas mismas*. Pero esto significa sólo que he grabado bien en mí esas formas; que me las he grabado como paradigmas.) Y si quiero ahora correlacionar así las formas *M* y *P*, ¿no pueden presentárseme dificultades, por ejemplo, porque haya abajo un ángulo de más, o una raya de más arriba?—«¡No, si realmente has vuelto a dibujar *M* y *P*!—¡Y esto puede demostrarse; contempla esta figura!»



Esta figura me enseña un nuevo modo de controlar si realmente he dibujado ahora las mismas figuras; pero ¿no pueden presentárseme dificultades ahora, a pesar de todo, si quiero guiarme por este modelo? Digo, sin embargo, que estoy seguro de que normalmente no se me presentará dificultad alguna.

42. Hay un rompecabezas que consiste en componer una figura, por ejemplo un rectángulo, con piezas dadas. La división de la figura es tal, que nos resulta difícil encontrar la composición correcta de las partes. Sea, por ejemplo, ésta:



¿Qué encuentra el que consigue la composición?—Encuentra: una posición —en la que no había pensado antes.—Bien; pero ¿no puede decirse entonces: que él se convence de que esos triángulos pueden colocarse así?—Pero 'esos triángulos': ¿son aquellos que están arriba en el rectángulo, o son triángulos que hay primero que colocar así?

43. A quien dice: «No hubiera creído que pudieran colocarse así esas figuras», no se le puede decir, apuntando al rompecabezas compuesto: «¿Así que no creías que pudieran colocarse de este modo esas piezas?»—El respondería: «Quiero decir que no había pensado en absoluto en ese modo de colocación.»

44. Imaginémonos las propiedades físicas de las partes del rompecabezas de tal modo que no admitan la posición buscada. Pero no que uno encuentre resistencia cuando intenta colocarlas

en esa posición; sino simplemente que se hacen todos los demás intentos, sólo no *aquél*, y las piezas, también por casualidad, no alcanzan esa posición. Es como si esa posición estuviera excluida del espacio. Como si existiera aquí una 'mancha ciega', en nuestro cerebro, por ejemplo. —¿Y no *es* lo mismo cuando creo haber intentado todas las posiciones *posibles* y, como por arte de brujería, resulta que siempre he pasado por alto ésa?

¿No se puede decir: la figura que te muestra la solución cura una ceguera? O también: ¿cambia tu geometría? Es como si te mostrara una nueva dimensión del espacio. (Como cuando se muestra a una mosca el camino de salida del mosquitero.)

45. Un demonio ha rodeado con un hechizo esa posición y la ha excluido de nuestro espacio.

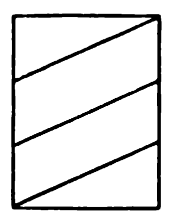
46. La nueva posición ha surgido como de la nada. Allí donde antes no había nada, ahora de repente hay algo.

47. ¿Hasta qué punto te ha convencido la solución de que puede hacerse tal y tal cosa? - Antes *no* podías hacerlo —y ahora tal vez puedas.

48. Dije: «acepto esto y esto como demostración de una proposición», pero ¿*no* puedo aceptar la figura que muestra encajadas las piezas del rompecabezas como demostración de que esas piezas pueden acoplarse a ese contorno?

49. Pero imagina ahora que una de las piezas esté situada de tal modo que resulte ser la imagen especular de la parte correspondiente del modelo. Alguien quiere ahora componer la figura siguiendo el modelo, ve que tiene por qué salir bien, pero no se le ocurre girar la pieza y se encuentra con que no consigue acoplarla.

50. Puede componerse un rectángulo con dos paralelogramos y dos triángulos. Demostración:



A un niño le resultaría difícil dar con la composición de un rectángulo a partir de esos componentes y se sorprendería de que dos lados de los paralelogramos caigan en una línea recta, cuando los paralelogramos son oblicuos.—Es posible que le pareciera que el rectángulo surge de esas figuras por arte de magia, por así decirlo. Tiene que admitir, en efecto, que ahora forman un rectángulo, pero por un truco, por una posición distorsionada, de modo no natural.

Puedo imaginarme que, una vez que ha colocado ambos paralelogramos de *esa* manera, el niño no dé fe a sus ojos al ver que se combinan *así*. '*No tienen aspecto* de combinarse así.' Y podría imaginarme que alguien dijera: Sólo por una ilusión nos parece como si *ellos* formaran el rectángulo; en realidad han mudado su naturaleza, ya no son los paralelogramos.

51. «Tú admites *esto*; entonces tienes que admitir *esto*.»— El *tiene que* admitirlo, ¡y al mismo tiempo es posible que no lo admita! Tú quieres decir: «si *piensa*, tiene que admitirlo.»

«Te diré por qué has de admitirlo.»—Pondré ante tus ojos un caso que, si lo consideras, te determinará a juzgar así.

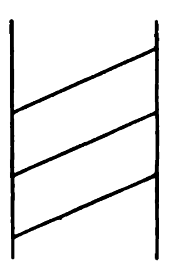
52. ¿Cómo pueden las manipulaciones de la demostración llevarlo a admitir algo?

53. «Pero tienes que admitir que 5 está compuesto de 3 y 2.»



Sólo quiero admitirlo si con ello no admito nada. Excepto que quiero usar *esa imagen.*

54. Podría tomarse, por ejemplo, la figura



como demostración de que 100 paralelogramos, así colocados, han de producir una línea recta. Si se colocan 100 realmente, quizá se obtenga una línea ligeramente curva. Pero la demostración nos ha determinado a usar la imagen y la forma de expresión: si no producen una línea recta es que no estaban construidos con exactitud.

55. ¡Piensa sólo cómo puede la figura que me muestras (o el procedimiento) comprometerme ahora a juzgar así y así siempre!

Sí, tengo ante mí un experimento, pero *uno* es demasiado poco para comprometerme al juicio que sea.

56. El que está demostrando dice: «¡Contempla esta figura! ¿Qué diremos de ella? ¿No, que un rectángulo está compuesto de...?»

O también: «A esto lo llamas 'paralelogramo' y a esto 'triángulos', y *así* parece cuando una figura se compone de otras.»

57. «Sí, me has convencido: un rectángulo se compone siempre de...»—¿Diría yo también: «Sí, me has convencido: *este* rectángulo (el de la demostración) se compone de...»? Y ésta sería la proposición más modesta, que también admitiría quien no admite aún la proposición general. Pero, extrañamente, parece que el que admite *esto* admite, no la proposición geométrica más modesta, sino algo que no es en absoluto una proposición de la geometría. Efectivamente, puesto que con respecto al rectángulo de la demostración él no me ha convencido de nada. (Si yo hubiera visto anteriormente esa figura, no hubiera tenido ninguna duda respecto a ella.) En lo que concierne a esa figura, he admitido todo por acuerdo propio. Y él sólo me ha convencido *por mediación* de ella.—Pero, por otra parte, si él ni siquiera me ha convencido de nada respecto a *este* rectángulo, ¿cómo me podría convencer, entonces, de una propiedad de otros rectángulos?

58. «Sí, por su apariencia no parece que la forma pudiera componerse de dos partes oblicuas.»

¿Qué es lo que te sorprende? ¡No, seguro, el que veas ahora esa figura ante ti! Me sorprende algo *en* esa figura.—¡Pero en esa figura no sucede nada!

Lo que me sorprende es la asociación de lo oblicuo con lo recto. Es como si me mareara.

59. Sin embargo, cuando he visto, por ejemplo, el gráfico de la solución del rompecabezas, realmente digo: «Me he convencido de que la figura puede construirse con esas piezas».

Si ahora se lo digo a alguien, tiene que ser así: «¡Inténtalo!, esas piezas, correctamente colocadas, componen realmente la figura.» Quiero animarlo a hacer algo y le auguro ya el éxito. Y el augurio se basa en la facilidad con la que puede construirse la figura con las piezas, una vez que ya se sabe *cómo*.

60. Dices que te extraña lo que la demostración te muestra. Pero ¿te extraña que hayan podido trazarse esas líneas? No. Te extrañas sólo cuando te dices a ti mismo que dos piezas así *dan* esa forma. Cuando te imaginas a ti mismo, por tanto, dentro de la situación: esperabas algo diferente y ahora ves el resultado.

61. «De *esto* se sigue inexorablemente *esto*.»—Sí, en esta demostración esto se sigue de esto.

Y eso es una demostración para el que la reconoce como demostración. Quien *no* la reconoce, quien no la sigue como demostración, se aparta de nosotros antes incluso de que se llegue a hablar.

62.



He ahí algo que parece inexorable. Y sin embargo: ¡'inexorable' sólo puede serlo en sus consecuencias! Porque si no, se trata sólo de una imagen.

¿En qué consiste, entonces, la acción a distancia —por así decirlo— de este esquema?

63. He leído una demostración —ahora estoy convencido.—¿Y qué si olvido inmediatamente ese convencimiento?

Puesto que se trata de un proceder peculiar: *recorro* la demostración y acepto luego su resultado.—Quiero decir: así lo *hacemos* precisamente. Esta es entre nosotros la costumbre, o un hecho de nuestra historia natural.

64. 'Si tengo *cinco*, tengo entonces *tres*, y *dos*.'—Pero ¿cómo sé que tengo cinco?—Bueno, cuando ello presenta esta aparien-

cia: | | | | |.—¿Y es seguro también que cuando ello presenta *esa* apariencia siempre puedo dividirlo en *tales* grupos?

Es un hecho que podemos jugar al siguiente juego: enseño a alguien cómo es un grupo de uno, de dos, de tres, de cuatro o de cinco, y le enseño a correlacionar rayas una a una; después hago que cumpla, dos veces cada vez siempre, esta orden: «Dibuja un grupo de cinco», y después esta orden: «Correlaciona ambos grupos mutuamente»; entonces se muestra que prácticamente *siempre* él correlaciona todas las rayas, sin excepción, una a una.

O también: es un hecho que *prácticamente nunca* encuentro dificultades para la correlación uno a uno de lo que dibujo como grupos de cinco.

65. Tengo que ensamblar el rompecabezas, lo intento de un modo y otro, dudo de si conseguiré componerlo. Entonces, alguien me muestra la imagen de la solución. Y —ya sin duda alguna— digo «¡ahora puedo hacerlo!»—Pero ¿es *seguro* que ahora *lo* compondré?—El hecho es, sin embargo que no dudo de ello.

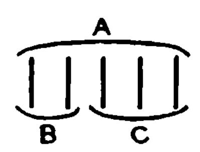
Si ahora preguntara alguien: «¿En qué consiste la acción a distancia de aquella imagen?»—En que la uso.

66. *En* una demostración nos *ponemos de acuerdo* con alguien. Si no nos ponemos de acuerdo en ella, nuestros caminos se separan antes de que se llegue a una comunicación mediante ese lenguaje.

No es esencial que uno persuada al otro con la demostración. Puesto que ambos pueden verla (leerla) y aceptarla.

67. «Pero tú ves —no puede haber duda alguna— que un grupo como *A* se compone esencialmente de uno como *B* y de uno como *C*.»—También yo digo —o sea, también yo me expreso así— que el grupo que has dibujado se compone de los dos más pequeños; pero no sé si todo grupo, del que yo diría que es del mismo tipo (o forma) que el primero, ha de estar compuesto necesariamente de dos grupos del tipo de aquellos más peque-

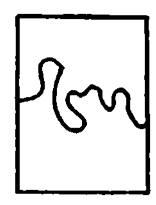
ños.—Creo, sin embargo, que probablemente siempre será así (quizá mi experiencia me lo ha enseñado) y por eso aceptaré como regla: Diré que un grupo es de la forma *A* si, y sólo si, puede ser dividido en dos grupos como *B* y *C*.



68. Y es así también como el dibujo 50 actúa como demostración. «¡Sí, en efecto! ¡Dos paralelogramos se ensamblan en esa forma!» (Esto se asemeja mucho a que yo dijera: «¡Sí, realmente! una curva puede componerse de trozos rectos».)—No lo hubiera pensado. Sí, no hubiera pensado que las partes de esa figura formaran esa figura. Pero esto no significa nada.—Lo que sucede, más bien, es que solamente me extraño cuando pienso en el caso en que hubiera colocado desapercibidamente el paralelogramo de arriba sobre el de abajo y viera ahora este resultado.

69. Y podría decirse: la demostración me ha convencido de *aquello*, que también puede sorprenderme.

70. Pues, por qué digo que la figura 50 me convence de algo, y no igualmente ésta:



Porque ella muestra, en efecto, que dos trozos así forman un rectángulo. «Pero esto carece de interés», se diría. ¿Y por qué carece de interés?

71. Si se dice: «Esta forma se compone de estas formas», se imagina uno, entonces, la forma como un dibujo fino, como un fino armazón de esa forma, sobre el que, por así decirlo, se extienden las cosas que tienen esa forma. (Compara: la concepción de Platón de las propiedades como ingredientes de una cosa.)

72. «Esta forma se compone de estas formas. Me has mostrado una propiedad esencial de esta forma.»—Me has mostrado una nueva *imagen*.

Es como si *Dios* la hubiera conjuntado así.—*Nos valemos, pues, de un símil.* La *forma* se convierte en una entidad etérea que tiene esa forma; es como si hubiera sido conjuntada así de una vez por todas (por aquel que ha puesto las propiedades esenciales de las cosas). Puesto que si la forma se convierte en una cosa compuesta de partes, el hacedor de la forma es aquel que ha hecho también la luz y la oscuridad, el color y la dureza, etc. (Imagina que alguien preguntara: «La forma... está compuesta de esas partes; ¿quién la ha compuesto? ¿Tú?»)

Se ha empleado la palabra «ser» como un modo sublimado, etéreo, de existir. Considera ahora la proposición: «el rojo *es*», por ejemplo. Nadie, en efecto, la usa; pero, en caso de que yo hubiera de encontrar un uso para ella, éste sería: como fórmula introductoria a los enunciados que han de hacer uso de la palabra «rojo». Al pronunciar la fórmula miro a una muestra de color rojo.

Uno está tentado de pronunciar una frase como «el rojo *es*», cuando uno considera con atención el color: es decir, en la misma *situación* en la que uno constata la existencia de una cosa (de un insecto lameliforme, por ejemplo).

Y quiero decir, cuando se usa la expresión «la demostración me ha enseñado —me ha convencido de— que éste es el caso», uno está todavía en aquel símil.

73. Podría haber dicho también: No es jamás la propiedad del objeto la que es 'esencial', sino el distintivo característico del concepto.

74. «Si la forma del grupo era la misma, entonces ha de tener los mismos aspectos, las mismas posibilidades de división. Si tiene otros, entonces no es la misma forma: quizá sucede que, de algún modo, te ha producido la misma impresión; pero sólo es la *misma forma* cuando puedes dividirlo de la misma manera.»

Es como si esto expresara la esencia de la forma.—Pero yo digo, sin embargo: Quien habla de la *esencia*, constata sólo una convención. Y uno aquí querría replicar: no hay nada más diferente que una proposición sobre la profundidad de la esencia y una sobre la mera convención. Pero, ¿qué, si yo contestara: la *profundidad* de la esencia corresponde a la *profunda* necesidad de convención?

Así pues, si digo: «es como si esta proposición expresara la *esencia* de la forma», entiendo por ello: ¡es como si esta proposición expresara una propiedad de la esencia *forma*!—Y puede decirse: la esencia de la que él afirma una propiedad, y que yo llamo aquí la esencia 'forma', es la imagen que no puedo por menos de hacerme ante la palabra «forma».

75. Pero, ¿qué clase de propiedades de las 100 bolas has desarrollado o mostrado?[4]—Bueno, el que pueda hacerse esas cosas con ellas.—Pero, ¿*qué* cosas? ¿Quieres decir que has podido moverlas así, que no estaban pegadas a la mesa?—No tanto esto como que esas formaciones surgieron de ellas, sin que ninguna sobrara o faltara.—Has mostrado, por tanto, propiedades físicas de la fila. Pero, ¿por qué has usado la expresión «desarrollar»? Nunca dirías que desarrollas las propiedades de una barra de hierro, cuando muestras que se funde a tales o tales grados. ¿Y no podrías haber dicho igualmente que has desarrollado las propiedades de nuestra memoria para los números, en vez de las propiedades de la fila, por ejemplo? Lo que propiamente *desarrollas* es justamente la fila de bolas.—Y muestras, por ejemplo, que una fila, cuando tiene tal y tal aspecto, o está numerada así con números romanos, puede ser puesta en cualquier otra forma fácil de recordar, de modo simple y sin que falte ni sobre bola alguna. Pero igualmente podría tratarse de un experimento psicológico

[4] Véase *supra*, § 36. (*Nota de los editores.*)

que mostrara que tú *ahora* encuentras fácil de retener ciertas formas en las que se colocan las 100 manchas por simple desplazamiento.

«He mostrado lo que se puede hacer con 100 bolas.»—Has mostrado que *esas* 100 bolas (o esas bolas que hay ahí) pueden colocarse así. Se trata de un experimento de colocación (en contraste, por ejemplo, con uno de ignición).

Y el experimento psicológico podría mostrar, por ejemplo, lo fácil que se te puede engañar: esto es, que no notas si te sacan o te meten bolas en la fila. También podría uno expresarse *así:* he mostrado lo que puede hacerse con una fila de 100 bolas por un aparente desplazamiento; qué figuras pueden salir de esa fila por un aparente desplazamiento.—Pero ¿qué es lo que he desarrollado en ese caso?

76. Imagínate que alguien dijera: desarrollemos las propiedades de un polígono uniendo de tres en tres sus lados por medio de una diagonal. El polígono se muestra entonces como una figura de 24 ángulos. ¿Diré entonces que he desarrollado una propiedad del 24-ángulos? No. Diré que he desarrollado una propiedad de ese polígono (aquí dibujado). Sé ahora que aquí hay un polígono de 24 ángulos.

¿Es esto un experimento? Me muestra, efectivamente, qué clase de polígono hay ahí ahora. Lo que he hecho puede llamarse un experimento de contar.

Sí, pero ¿qué sucede si aplico ese experimento a un pentágono al que puedo captar con una mirada?—Bueno, supongamos por un instante que no pudiera captarlo así, lo que puede suceder, por ejemplo, si es muy grande. Entonces, el trazado de las diagonales sería un medio para convencerme de que se trata de un pentágono. Podría volver a decir que he desarrollado las propiedades del polígono que está dibujado ahí.—Que pueda abarcarlo ahora de una ojeada no puede cambiar para nada *lo anterior*. Quizá fue superfluo desarrollar esa propiedad, como es superfluo contar dos manzanas que están ante mí.

¿He de decir ahora: «Fue otra vez un experimento, pero yo ya estaba seguro del resultado»? Pero, ¿estoy seguro de este resultado como lo estoy del resultado de la electrolisis de una masa de

agua? ¡No; sino de otro modo! Si no se produjera la electrolisis del líquido... me consideraría chiflado o, digamos, ya no sabría en absoluto qué decir.

Imagínate que digo: «¡Sí, aquí hay un cuadrado, pero comprobemos si puede dividirse en dos triángulos por medio de una diagonal!» Trazo entonces la diagonal y digo: «Sí, aquí tenemos dos triángulos.» Entonces alguien me preguntaría: ¿Es que no has *visto* que puede ser dividido en dos triángulos? ¿Sólo ahora te convences de que hay aquí un cuadrado? ¿Y por qué confías más en tus ojos ahora que antes?

77. Ejercicios: número de tonos —la propiedad interna de una melodía—; número de hojas —propiedad externa de un árbol. ¿Qué relación tiene esto con la identidad de un concepto? (Ramsey.)

78. ¿Qué nos muestra quien separa 4 bolas en 2 y 2, vuelve a unirlas, vuelve a separarlas, etc.? Nos graba una fisonomía y una típica alteración de esa fisonomía.

79. Piensa en las posibles posturas de una muñeca articulada. O piensa que tuvieras una cadena con, pongamos, 10 eslabones y que muestras qué figuras características (es decir, fáciles de recordar) puede hacerse con ella. Si los eslabones están numerados forman una estructura fácil de recordar, aunque estén en línea recta.

Así pues, grabo en tu memoria posiciones y movimientos característicos de esta cadena.

Si digo ahora: «Mira, también puede hacerse *esto* con ella» y lo hago, ¿muestro ahí un experimento?—Puede ser; muestro, por ejemplo, que se le puede dar esta forma; pero de esto no has tenido dudas. Y lo que te interesa no es algo que tenga que ver con esa cadena correcta.—Pero, ¿no muestra lo que hago una propiedad de esa cadena? Ciertamente; pero sólo realizo los movimientos, las transformaciones que son fáciles de recordar; y a

ti te interesa *aprender* esas transformaciones. Pero te interesa por lo fácil que resulta reproducirlo siempre en objetos diferentes.

80. Las palabras «mira lo que puedo hacer con ella» son, en verdad, las mismas que emplearía si te mostrara todo lo que puedo hacer con un trozo de arcilla, por ejemplo. Que soy suficientemente hábil, por ejemplo, para hacer tales cosas con esa masa. En otro caso diferente: que ese material permite ser tratado *así*. Aquí apenas diríamos: 'te hago observar' que puedo hacerlo, o que el material lo admite, mientras que en el caso de la cadena se diría: te hago observar que puede hacerse esto con ella.—Puesto que tú podrías habértelo *imaginado* también. Pero, naturalmente, no puedes conocer ninguna propiedad del material imaginándola.
Lo experimental desaparece en cuanto se considera el proceso simplemente como una imagen fácil de recordar.

81. Lo que desarrollo, puede decirse, es el *papel* que desempeña en nuestro sistema de cálculo.

82. (Escribí una vez:[5] «En la matemática proceso y resultado son equivalentes.»)

83. Y sin embargo, siento que es una propiedad de '100' el que sea o pueda ser producido así. Pero, ¿cómo puede ser una propiedad de la estructura '100' el que sea producida así, en el caso, por ejemplo, de que no haya sido producida así en absoluto? ¿En el caso de que nadie multiplicara así? Sólo, en efecto, si pudiera decirse que es una propiedad de este signo el ser objeto de esta regla. Por ejemplo, es una propiedad de '5' ser objeto de la regla '3+2=5'. Puesto que, sólo como objeto de la regla, este número es *el* resultado de la adición de aquellos otros números.

[5] Cfr. «Tractatus logico-philosophicus» 6.1261: En la lógica, proceso y resultado son equivalentes. (*Nota de los editores.*)

Pero, ¿si digo ahora: es una propiedad del número... ser el resultado de la adición de... según la regla...? Entonces es una propiedad del número el que se produzca por la aplicación de esta regla a estos números. La pregunta es: ¿lo llamaríamos 'aplicación de la regla' en el caso de que este número *no* fuera el resultado? Y ésta es la misma pregunta que: «¿Qué entiendes por 'aplicación de esta regla': lo que haces con ella (la apliques unas veces de un modo, otras de otro), o se explica de otra manera 'su aplicación'?»

84. «Es una propiedad de este número el que este proceso conduzca a él.»—Pero, hablando matemáticamente, ningún proceso conduce a él, sino que él es el final de un proceso (pertenece aún al proceso).

85. Pero, ¿por qué siento que se desarrolla, muestra, una propiedad de la fila?—Porque lo que se muestra, lo veo alternativamente como algo esencial y no esencial a la fila. O: porque pienso alternativamente en esas propiedades como externas e internas. Porque alternativamente acepto algo como por supuesto o lo encuentro digno de mención.

86. «Desarrollas ciertamente las propiedades de las 100 bolas cuando muestras lo que puede hacerse con ellas.»—¿*Cómo* puede hacerse algo con ellas? Puesto que nadie ha dudado que *pueda* hacerse algo con ellas, la cuestión ha de ser por el modo y manera *cómo* eso puede producirse con ellas. Pero ¡míralas, a ver si no presuponen ya el resultado!

Pues imagínate que de *esta manera* surge unas veces este resultado y otras otro; ¿aceptarías eso? ¿No dirías: «He debido equivocarme; del *mismo* modo y manera tendría que surgir siempre lo mismo»? Esto muestra que incluyes el resultado de la transformación en el modo y manera de la transformación.

87. Ejercicio: ¿He de denominar hecho de experiencia el que *esta* cara mediante *este* cambio se convierta en *aquélla*? (¿Cómo ha de explicarse '*esta* cara', '*este* cambio', para que...?)

88. Alguien dice: esta división *clarifica* qué clase de fila de bolas hay ahí. ¿Clarifica qué clase de fila *había* ahí antes de la división, o clarifica qué clase de fila hay ahí ahora?

89. «Veo a primera vista cuántos son.» Bien, ¿cuántos son? ¿Es la respuesta «*tantos*»?—(Apuntando a la vez al grupo de objetos.) ¿Cómo reza entonces? Son '50', o '100', etc.

90. «La división me clarifica qué clase de fila hay ahí.» Bien, ¿qué clase de fila hay ahí? ¿Es la respuesta «ésa»? ¿Cómo reza una respuesta con sentido?

91. Desarrollo también las propiedades geométricas de esta cadena cuando muestro las transformaciones de otra, similarmente construida. Pero con ello no muestro lo que puedo hacer de hecho con la primera en el caso de que ésta se revele de hecho no flexible o de otro modo cualquiera, físicamente inadecuado.

Así que no puedo decir: desarrollo las *propiedades de esta cadena.*

92. ¿Pueden desarrollarse propiedades de la cadena, que la cadena no posea en absoluto?

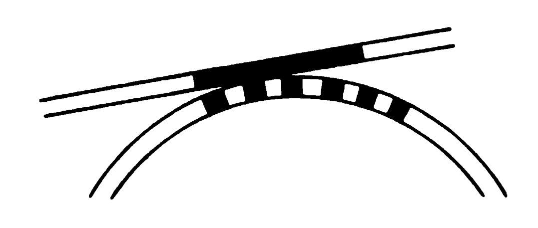
93. Mido una mesa y tiene 1 m de longitud.—Ahora coloco una regla de un metro junto a otra regla de un metro. ¿Mido ésta por ello? ¿Descubro que esta segunda tiene 1 m de longitud? ¿Hago el mismo experimento de medida, con la única diferencia de que estoy seguro del resultado?

94. Siempre que aplico la regla a la mesa, en efecto, mido la mesa; ¿controlo alguna vez la regla? ¿Y dónde reside la diferencia entre un proceder y el otro?

95. Entre otras cosas, el experimento del desarrollo de una fila puede mostrarnos de cuántas bolas se compone la fila, o bien que esas (digamos) 100 bolas podemos moverlas así y así.

Pero el cálculo del desarrollo nos muestra lo que llamamos una 'transformación por mero desarrollo'.

96. Examina la proposición: no es un *hecho de experiencia* que la tangente de una curva visual coincida un trecho con ella; y si una figura muestra esto, no lo hace como resultado de un experimento.

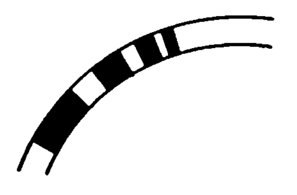


Podría decirse también: aquí ves que los segmentos de una curva visual son rectos.—Pero, ¿no debería yo decir: «A esto lo llamas seguramente una 'curva'.—¿Y cómo llamas a este trocito ahora: 'curvo' o 'recto'?—A esto lo llamas seguramente una 'recta', y ella contiene también este trozo.»

Pero ¿por qué no habría de usarse un nuevo nombre para recorridos visuales de una curva, que no muestran ellos mismos curvatura alguna?

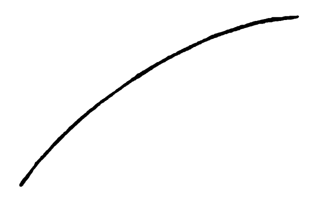
«El experimento de trazar esas líneas ha mostrado, sin embargo, que no se tocan en un *punto*.» ¿Que *ellas* no se tocan en un punto? ¿Cómo se definen '*ellas*'? O bien: ¿Puedes mostrarme en una imagen cómo es cuando se 'tocan en un punto'? Puesto que ¿por qué no he de decir simplemente: el experimento ha mostrado que ellas —a saber, una línea curva y una recta— se *tocan*? Puesto que ¿*no* es esto lo que yo llamo «toque» de esas líneas?

97. Dibujemos un círculo de trozos negros y blancos cada vez más pequeños.



«¿Cuál de esos trozos —de izquierda a derecha— te parece ya recto?» Aquí hago un experimento.

98. ¿Y si alguien dijera: «La experiencia te enseña que esta línea es curva»?—A ello habría que decir que aquí las palabras



«esta línea» significan la *raya* trazada sobre el papel. Podría hacerse efectivamente el experimento de mostrar esa raya a diferentes personas preguntando: «¿qué ves; una linea recta o una curva?»

Pero si alguien dijera: «Me imagino ahora una línea curva», y le respondiéramos: «Ya ves, pues, que esa línea es curva», ¿qué sentido tendría esto?

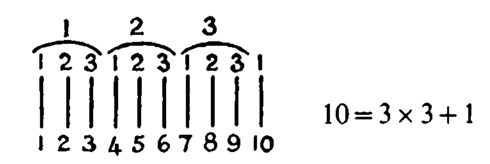
Pero también puede decirse ahora: «Me imagino un círculo de trozos negros y blancos, uno de ellos es grande, curvo, los demás son cada vez más pequeños, el sexto ya es recto.» ¿Dónde reside el experimento?

En la imaginación puedo calcular, pero no experimentar.

99. ¿Cuál es el uso característico del procedimiento de la deducción como *cálculo*, en contraposición a su uso como experimento?

Consideramos el cálculo como demostración de una *propiedad interna* (una propiedad de la *esencia*) de las estructuras. Pero, ¿qué significa esto?

Esto podría servir como modelo de 'propiedad interna':



Si digo ahora: 10 rayas se componen necesariamente de 3 por 3 rayas y una raya, ello no significa: si hay ahí 10 rayas, siempre habrá alrededor números y arcos.—Pero si los pongo junto a las rayas, digo entonces que sólo estaba demostrando la esencia del grupo de rayas. Pero ¿estás seguro de que el grupo no ha cambiado al añadir aquellos signos?—«No sé; pero ahí había ya *un* número determinado de rayas; y, si no uno de 10, sí otro cualquiera, en cuyo caso, simplemente, tendría otras propiedades.»

100. Se dice: el cálculo 'desarrolla' la propiedad de la centena.—¿Qué significa propiamente: que 100 se compone de 50 y 50? Se dice: el contenido de la caja consiste en 50 manzanas y 50 peras. Pero si alguien dijera: «el contenido de la caja consiste en 50 manzanas y 50 manzanas», no sabríamos en principio a qué se refiere.—Cuando se dice: «El contenido de la caja consiste en 2 veces 50 manzanas», ello significa que hay en ella dos compartimentos, de 50 manzanas cada uno; o bien se trata de un reparto en el que cada uno ha de recibir 50 manzanas, y lo que oigo es que esa caja puede alcanzar para dos personas.

101. «Las 100 manzanas de la caja se componen de 50 y 50»; aquí es importante el carácter intemporal de 'se componen'.

Puesto que no significa que se compongan *ahora*, o por algún tiempo, de 50 y 50.

102. ¿Cuál es, pues, la característica de las 'propiedades internas'? Que permanecen siempre, inalterables, en el todo que constituyen; independientes, por así decirlo, de todos los acontecimientos externos. Al igual que la construcción de una máquina sobre el papel no se rompe aunque la máquina misma sucumba ante fuerzas exteriores. —O bien yo diría: que no están sujetas al viento y al tiempo, como lo físico de las cosas; sino que son inviolables, como esquemas.

103. Cuando decimos: «esta proposición se sigue de aquélla», volvemos a usar «seguir» *intemporalmente*. (Y esto muestra que esta proposición no expresa el resultado de un experimento.)

104. Compáralo con: «lo blanco es más claro que lo negro». También esta expresión es intemporal y expresa la existencia de una relación *interna*.

105. «Más bien esta relación *persiste*», diría alguien. Pero la cuestión es: ¿Tiene un uso esa proposición? ¿Y qué uso? Pues, de momento, lo único que sé es que al decirlo me ronda la cabeza una imagen (pero esto no me garantiza el uso) y que las palabras forman una frase castellana. Pero salta a la vista que las palabras se usan aquí de otro modo que en el caso ordinario de un enunciado útil. (Así como, por ejemplo, el constructor de ruedas puede observar que los enunciados que él hace normalmente sobre lo circular y lo recto son de otro tipo que los que aparecen en Euclides.) Puesto que decimos: este *objeto* es más claro que aquél, o bien, el color de esta cosa es más claro que el color de aquélla, de modo que algo es más claro ahora pero puede ser más oscuro después.

¿De dónde viene el sentimiento de que «lo blanco es más claro que lo negro» expresa algo sobre la *esencia* de ambos colores?

Pero, ¿está siquiera bien planteada la pregunta? ¿A qué nos referimos con la 'esencia' de blanco o de lo negro? Pensamos quizá en 'lo interior', en 'la constitución', pero eso no produce sentido alguno aquí. También decimos, por ejemplo: «Reside en lo blanco ser más claro...».

No es así: la imagen de una mancha negra y de otra blanca



nos sirve simultáneamente de paradigma de lo que entendemos por «más claro» y «más oscuro», y de paradigma para «blanco» y para «negro». Ahora la oscuridad 'reside en' lo negro *en la medida en que ambos* son representados por esa mancha. Es oscura *porque* es negra.—Pero dicho más correctamente: se la *llama* «negra» y con ello, en nuestro lenguaje, también «oscura». Esa conexión, una conexión de paradigmas y nombres, se produce en nuestro lenguaje. Y nuestra proposición es intemporal porque sólo expresa la conexión de las palabras «blanco», «negro» y «más claro» con un paradigma.

Pueden evitarse malentendidos declarando que es absurdo decir: «el color de este cuerpo es más claro que el color de aquél»; que habría que decir: «este cuerpo es más claro que aquél». O sea, aquella forma de expresión se excluye de nuestro lenguaje.

¿A quién decimos «lo blanco es más claro que lo negro»? ¿Qué información le da esto?

106. Pero ¿no puedo creer, también, una proposición de la geometría sin demostración, por ejemplo, fundándome en la aseveración de otro?—¿Y qué pierde la proposición cuando pierde su demostración?—Lo que he de preguntar aquí es: «¿Qué puedo hacer con ella?», puesto que eso es lo que importa. *Aceptar* una proposición fiándose en la aseveración del otro, ¿cómo se muestra esto? Puedo usarla, por ejemplo, en sucesivas operaciones de cálculo, o la uso para juzgar un hecho físico. Si alguien me asegura, por ejemplo, que 13 por 13 son 196, y le creo, entonces habré de extrañarme de que 196 nueces no puedan colocarse en

13 filas de 13 nueces cada una, y admitiré, quizá, que las nueces se hayan multiplicado por sí mismas.

Pero me siento tentado de decir: que no puede *creerse* que 13 × 13 = 196, que sólo puede *aceptarse* mecánicamente del otro este número. Pero, ¿por qué no he de decir que lo creo? ¿Es que creerlo es un acto misterioso, que, por así decirlo, está en comunicación subterránea con la operación correcta? Pero en todo caso puedo *decir*: «lo creo», y luego actuar en consecuencia.

Alguien preguntaría: «¿Qué hace el que cree que 13 × 13 = 196?» Y la respuesta puede ser: Bueno, eso dependerá, por ejemplo, de si ha hecho la operación él mismo y se ha equivocado al hacerla, o de si la ha hecho otro y él sabe, sin embargo, cómo se hace una operación así, o de si no sabe multiplicar, pero sabe que el producto es el número de gente que hay en 13 filas de 13 cada una; en una palabra, dependerá de lo que pueda hacer con la ecuación 13 × 13 = 196. Puesto que demostrarla es hacer algo con ella.

107. Si se considera la ecuación aritmética como expresión de una relación interna, diríamos: «El no puede creer en absoluto que de 13 × 13 resulte *esto*, puesto que ello no es una multiplicación de 13 por 13, o no es *resultado* alguno, si al final aparece 196.» Pero esto significa que no se quiere usar la palabra «creer» para el caso de una operación y de su resultado, o sólo cuando se cuenta con la operación correcta.

108. «¿Qué cree el que cree que 13 × 13 son 196?» —¿Hasta dónde penetra, podría decirse, con su creencia, en la relación de esos números? Puesto que —alguien diría— él no puede penetrar hasta el final; o no podría creerlo.

Pero ¿cuándo penetra en la relación de esos números? ¿Mientras dice que cree...? No insistirás en esto, ya que es fácil ver que esta ilusión sólo viene producida por la forma superficial de nuestra gramática (podríamos decir).

109. Pues yo diría: «Sólo se puede *ver* que 13 × 13 = 169, y esto no se puede *creer*. Y se puede —más o menos ciegamente—

aceptar una regla.» ¿Y qué hago cuando digo esto? Hago un corte; entre la *operación* con su resultado (es decir, entre una imagen determinada, entre un modelo determinado) y un experimento con el suyo.

110. Yo diría: «Cuando digo que $a \times b = c$ —y sucede, a veces, que creo algo así —que digo que lo creo—, no creo entonces en una proposición matemática, ya que ella viene al final de una demostración, es el final de una demostración, sino que creo que ésta es la fórmula que aparece allí y allí, que obtendré así y así, y cosas semejantes.»—Y esto suena realmente como si yo penetrara en el proceso de la creencia de una proposición tal. Mientras que sólo —de manera torpe— señalo la diferencia *fundamental*, bajo apariencia de semejanza, entre los cometidos de una proposición aritmética y de una proposición de experiencia.

Puesto que, en determinadas circunstancias, *digo*, precisamente: «creo que $a \times b = c$». ¿Qué quiero *significar* con ello? ¡Lo que *digo*! Así que la pregunta interesante es: ¿bajo qué circunstancias digo esto, y cómo se caracterizan en contraposición a las de un enunciado como: «creo que va a llover»? Puesto que lo que nos preocupa es justamente esa contraposición. Por ello, lo que pretendemos es conseguir una imagen del uso de las proposiciones matemáticas y de las proposiciones «creo que...», en las que el objeto de la creencia es una proposición matemática.

111. «Pero tú no crees la proposición matemática.»—Esto significa: 'proposición matemática' designa para mí un cometido para la proposición, una función, en los que no sucede creencia alguna.

Compara: «Cuando dices: 'creo que el enroque sucede así y así', no crees en una regla del ajedrez, sino que crees, por ejemplo, que una regla del ajedrez reza *así*.»

112. «No se puede *creer* que de la multiplicación 13×13 se obtenga 169, ya que el resultado pertenece a la operación.»—¿A qué llamo yo «la multiplicación 13×13»? ¿Sólo a la imagen

correcta de la multiplicación, en cuyo final, abajo, aparece 169? ¿O también a una 'multiplicación falsa'?

¿Cómo se establece qué imagen es la multiplicación 13 × 13?—¿No viene ello *determinado* por las reglas de la multiplicación?—Pero, ¿y si con ayuda de esas reglas obtienes hoy algo diferente a lo que aparece en todos los libros de cálculo? ¿No es esto posible?—«¡No, si aplicas las reglas como *ellos*!»—¡Efectivamente no! Pero esto es un mero pleonasmo. ¿Y dónde aparece cómo han de aplicarse?—Y si aparece en alguna parte: ¿dónde aparece cómo hay que aplicar *esto*? Y ello no sólo quiere decir: ¿en qué libro aparece esto?, sino también ¿en qué *cabeza*? —¿Qué es, pues, la multiplicación 13 × 13? O ¿de qué debo guiarme al multiplicar: de las reglas, o de la multiplicación que aparece en los libros, en caso de que ambas cosas no coincidan?—Bueno, de hecho nunca sucede que quien ha aprendido a calcular obtenga obstinadamente en esta multiplicación un resultado distinto al que aparece en los libros de cálculo. Pero si sucediera, lo declararíamos anormal e ignoraríamos en adelante su cálculo.

113. «Pero, en una cadena de inferencias, ¿no me veo obligado a proceder como procedo?»—¿Obligado? ¡Yo puedo proceder como quiera!—«Pero si quieres permanecer de acuerdo con las reglas *debes* proceder así.»—En absoluto; yo llamo a *esto* 'acuerdo'.—«Entonces has cambiado el sentido de la palabra 'acuerdo', o el sentido de la regla.»—No; ¿quién dice aquí lo que significa 'cambiar' y 'permanecer igual'?

Por muchas reglas que me indiques, yo siempre te doy una regla que justifica *mi* uso de tus reglas.

114. Podríamos decir también: Si *seguimos* las leyes de inferencia (reglas de inferencia), entonces en un seguir siempre hay un interpretar.

115. «¡Pero tú no puedes ahora, de repente, aplicar la ley de otro modo!» —Si respondo a ello: «¡Ah, sí, la había aplicado *así*!», o: «¡Ah, *así* tenía que aplicarla!», entonces te sigo el juego. Pero si

respondo simplemente: «¿De otro modo? – ¡Esto no *es* aplicarla de otro modo!»; ¿qué harás tú? Es decir, él puede contestar como una persona razonable y, sin embargo, no seguirnos el juego[6].

116. «Así pues, según tú, cualquiera podría continuar la serie como quisiera; y, por tanto, también concluir de *cualquier* manera.» Pero entonces no llamaremos a eso «continuar la serie», ni tampoco «inferir». Y pensar e inferir (al igual que contar) no están delimitados para nosotros, naturalmente, por una definición arbitraria, sino por límites naturales, que corresponden al cuerpo de aquello que podríamos llamar el cometido del pensar e inferir en nuestra vida.

Puesto que estamos de acuerdo en que las leyes de inferencia no le compelen a escribir o decir esto y esto, como compelen los raíles al tren. Y si dices que, aunque pueda *hablar* de ello, no puede *pensarlo*, entonces diré únicamente que esto no significa: que él, a pesar de todo esfuerzo, no pueda pensarlo, sino que: al 'pensar' pertenece para nosotros esencialmente el que él —al hablar, escribir, etc.— dé *tales* pasos. Y digo, además, que el límite entre aquello que todavía llamamos «pensar» y lo que ya no llamamos así, está trazado con tan poca claridad como el límite entre lo que aún llamamos «legaliformidad» y lo que ya no denominamos así.

Pero puede decirse, sin embargo, que las leyes de inferencia nos obligan; a saber, en el sentido en que lo hacen otras leyes en la sociedad humana. El secretario que infiere como en (17), *tiene que* hacerlo así; se le castigaría si infiriera de otro modo. Quien infiere de otro modo entra, sin duda, en conflicto: con la sociedad, por ejemplo, pero también con otras consecuencias prácticas.

Y también hay algo en decir: no puede *pensarlo*. Quiere decirse, por ejemplo: no puede llenarlo de contenido personal: no puede realmente *acompañarlo* —con su entendimiento, con su persona. Es parecido a cuando se dice: estas secuencias tonales no ofrecen sentido alguno, no puedo cantarlas con expresión. No puedo *vibrar con* ellas. O bien, lo que es lo mismo aquí: no vibro con ellas.

---

[6] La última frase, añadida en marzo de 1944. (*Nota de los editores.*)

«Si habla de ello —podría decirse—, sólo puede hacerlo sin pensar.» Y aquí sólo hay que hacer una observación: que el hablar 'sin pensar' también se distingue, a veces, de otro hablar, por aquellas representaciones, sensaciones, etc., que al hablar se producen en el hablante; pero que ese acompañamiento no constituye el 'pensar' y sus fallos tampoco, todavía, la 'ausencia de pensar'.

117. ¿Hasta qué punto el argumento lógico es una compulsión?—«Ya que admites *esto*, y *esto*, ¡has de admitir *esto* también!» Este es el modo de compeler a alguien. Es decir, de hecho puede compelerse así a la gente a admitir algo.—No de otro modo, por ejemplo, a como se puede compeler a alguien a ir allí, indicándole el lugar imperiosamente con el dedo.

Piensa que, en un caso así, señalo a la vez con dos dedos dos direcciones, dejando en libertad al otro para elegir una de ambas direcciones —en otra ocasión señalo únicamente en *una* dirección—; esto puede también expresarse así: mi primera orden no le compelió a ir en *una* dirección, pero sí la segunda. Pero esto es un enunciado que ha de declarar de qué tipo fueron mis órdenes; pero no de qué modo actúan, si compelen de hecho a aquél o a aquél, es decir, si él las obedece.

118. Primero parecía como si esas consideraciones hubiesen de mostrar que 'lo que parece ser una compulsión lógica, en realidad es sólo una psicológica'; y la pregunta era: ¡¿conozco, entonces, ambos tipos de compulsión?!

Imagina que se empleara la expresión: «La ley §... castiga al asesino con la muerte.» Pero esto sólo podría significar: esta ley reza: tal y tal. Sin embargo, esa forma de expresión podría imponérsenos ella misma, ya que la ley es medio cuando el culpable es llevado al castigo.—Así, hablamos de 'inexorabilidad' en relación a quienes alguien castiga. En esto podría ocurrírsenos decir: «la ley es *inexorable*; los hombres pueden dejar en libertad al culpable, la ley lo ajusticia.» (Y también: «la ley lo ajusticia *siempre*.»)—¿Para qué puede emplearse esa forma de expresión?—En principio esa proposición sólo dice que en la ley hay

tal y tal muestra, además, la imagen de *un* juez inexorable —y de muchos jueces indulgentes—. Sirve, por ello, de expresión del respeto ante la ley. Y finalmente, esa forma de expresión puede usarse también de tal modo que se denomine 'inexorable' una ley cuando no contempla una posibilidad de indulto, y 'comprensiva', por ejemplo, en caso contrario.

Hablamos ahora de la 'inexorabilidad' de la lógica; y nos imaginamos las leyes de la lógica inexorables, más inexorables incluso que las leyes de la naturaleza. Hacemos observar entonces que la palabra 'inexorable' se usa de varios modos. A nuestras leyes lógicas corresponden hechos muy generales de la experiencia cotidiana. Son aquellos que nos posibilitan demostrar siempre, y cada vez, esas leyes de modo sencillo (con tinta sobre papel, por ejemplo). Pueden compararse con aquellos hechos que hacen fácilmente realizable y útil la medición con el patrón metro. Ello nos sugiere el uso de esas leyes de inferencia, precisamente, siendo *nosotros* inexorables, entonces, en la aplicación de esas leyes. Porque nosotros '*medimos*'; y pertenece al medir el que todos tengan la misma medida. Pero, además, pueden diferenciarse leyes de inferencia inexorables, es decir, *precisas*, de leyes de inferencias imprecisas, o sea, de aquellas que nos permiten una alternativa.

119. «Puedo inferir solamente aquello que realmente se sigue.» Es decir: lo que la máquina lógica produce realmente. La máquina lógica; eso sería un mecanismo etéreo que penetrara todo.—Hay que prevenir contra esta imagen.

Imagina un material más duro y rígido que cualquier otro. Pero que una barra de este material encogiera cuando se la pasa de la posición horizontal a la vertical; o que se doblara al ponerla en vertical, siendo, a pesar de ello, tan dura que no pudiera doblarse de otro modo.—(Un mecanismo hecho de este material, uno de manivela, biela y cruceta, por ejemplo. Otros de movimiento de la cruceta.)

O también: una barra se dobla cuando se le acerca una masa determinada; pero permanece completamente rígida frente a cualquier fuerza que hagamos actuar sobre ella. Imagina que los rieles conductores de la cruceta se doblan y se vuelven a enderezar cuando la manivela se acerca y se vuelve a alejar de ellos.

Supongo, sin embargo, que ninguna fuerza externa especial es necesaria para producir tal cosa. Este comportamiento de los rieles haría recordar el de un ser vivo.

Cuando decimos: «Si las partes del mecanismo fueran completamente rígidas se moverían de tal y tal modo», ¿cuál es el criterio de que sean completamente rígidas? ¿Que resistan determinadas fuerzas? ¿O que se muevan de tal y tal modo?

Suponte que digo: «Esta es la ley del movimiento de la cruceta (la correlación de su posición con la posición de la manivela, por ejemplo) si la longitud de la manivela y de la biela no cambian.» Esto significaría: Si las longitudes de la manivela y de la biela guardan esta relación, digo, entonces, que la longitud de la cruceta permanece constante.

120. «Si las partes fueran completamente rígidas se moverían así»: ¿es esto una hipótesis? Parece que no. Puesto que si decimos: «la cinemática describe los movimientos del mecanismo en el supuesto de que sus partes sean completamente rígidas», admitimos, por una parte, que ese supuesto nunca se da en realidad; por otra, ha de quedar fuera de toda duda que partes completamente rígidas se moverían así. Pero, ¿de dónde esa seguridad? No se trata aquí, realmente, de seguridad, sino de una estipulación que hemos hecho. No *sabemos* si los cuerpos, en caso de que (según tales y tales criterios) fueran rígidos, se moverían así; pero si llamaríamos (bajo ciertas circunstancias) 'rígidas, a partes que se mueven así —en tal caso piensa siempre que la geometría (o cinemática) no especifica método alguno de medición cuando habla de longitudes iguales o de la constancia de una longitud.

Así pues, si llamamos a la cinemática, por ejemplo, la teoría del movimiento de las partes completamente rígidas de un mecanismo, en ello hay ya, por una parte, una indicación sobre el método (matemático): estipulamos ciertas distancias como las longitudes de las partes del mecanismo que no se alteran; y una *indicación*, por otra parte, respecto a la aplicación del cálculo.

121. La dureza de la necesidad lógica. ¿Qué, si alguien dijera: la necesidad de la cinemática es mucho más dura que la necesidad

causal que compele a una parte de una máquina a moverse *así* cuando la otra se mueve *así*?

Imagina que representáramos los modos de movimiento del mecanismo 'completamente rígido' por medio de una imagen cinematográfica, por una película de dibujos animados. ¿Y si alguien dijera que esta imagen es *completamente dura*, refiriéndose con ello a que habíamos tomado esa imagen como modo de representación, sin atender a lo que son los hechos, ni a cómo se doblan o se dilatan las partes del mecanismo real?

122. La máquina (su estructura) como símbolo de su modo de funcionamiento: la máquina —podría yo decir en principio— parece tener ya en sí misma su modo de funcionamiento. ¿Qué quiere decir esto?

Una vez que conocemos la máquina, todo lo demás, a saber, los movimientos que va a llevar a cabo, parece estar ya completamente determinado.

«Hablamos como si esas partes sólo *pudieran* moverse así, como si no pudieran hacer otra cosa.»

¿Cómo es esto: olvidamos, por tanto, la posibilidad de que se doblen, rompan, fundan, etc? Sí; en *muchos* casos no pensamos en ello en absoluto. Usamos una máquina, o la imagen de una máquina, como símbolo de un determinado modo de funcionamiento. Transmitimos a alguien, por ejemplo, esa imagen y presuponemos que él deducirá de ella los fenómenos de los movimientos de las partes. (Así como podemos transmitir a alguien un número diciéndole que es el vigésimo quinto de la serie 1, 4, 9, 16...)

«La máquina parece tener ya en sí su modo de funcionamiento» quiere decir: Te sientes inclinado a comparar los movimientos futuros de la máquina, en su precisión, con objetos que están ya en una caja, y de la que los sacamos después.

Pero no hablamos así cuando se trata de predecir el comportamiento real de una máquina; entonces no olvidamos, en general, las posibilidades de deformación de las partes, etc.

Pero sí cuando nos asombramos de que podamos usar la máquina como símbolo de un modo de movimiento, siendo así

que puede moverse también de otro modo completamente *diferente.*

Ahora podríamos decir que la máquina, o su imagen, está al inicio de una serie de imágenes que hemos aprendido a derivar de ella.

Pero, cuando consideramos que la máquina hubiera podido moverse también de otro modo, nos parece fácil que ello sucediera; como si en la máquina en cuanto símbolo estuviera contenido su modo de movimiento mucho más determinadamente aún que en la máquina real. No bastaría, en tal caso, que éstos fueran los movimientos determinados previamente de acuerdo con la experiencia, sino que tendrían que estar ya propiamente —en un sentido misterioso— *presentes.* Y en efecto, esto es verdadero: el movimiento del símbolo de la máquina está predeterminado de modo diferente al de una máquina dada realmente.

123. «Es como si pudiéramos captar de golpe el uso completo de la palabra.»—¿Cómo *qué*, por ejemplo?—¿No se lo *puede* captar —en cierto sentido— de un golpe? Es justamente como si pudiéramos captarlo de un golpe en un sentido mucho más directo todavía. Pero, ¿tienes un modelo para ello? No. Lo único que se nos ofrece es ese modo de expresión. Como resultado de símiles que se cruzan.

124. No tienes ningún modelo de este hecho superlativo, pero estás tentado de usar una *super-expresión.*

125. ¿Cuándo piensa uno: la máquina, de algún modo misterioso, tiene sus posibles movimientos ya en sí misma?—Bueno, cuando uno filosofa. ¿Y qué nos induce a pensar en tal cosa? El modo y manera en que hablamos de la máquina. Decimos, por ejemplo, que la máquina *tiene* (*posee*) tales posibilidades de movimiento, hablamos de la máquina idealmente rígida, que sólo *puede* moverse de tal y tal modo. La *posibilidad* de movimiento ¿qué es eso? No es el *movimiento;* pero tampoco parece que sea la

mera *condición* física del movimiento, a saber, que entre el cojinete y el eje, por ejemplo, haya un cierto espacio intermedio, es decir, que el eje no encaje demasiado apretadamente en el cojinete. Puesto que, si bien, *de acuerdo con la experiencia*, esto es la condición de movimiento, podría, sin embargo, representarse de otro modo el asunto. La posibilidad del movimiento ha de ser, más bien, una sombra del movimiento mismo. Pero ¿conoces una sombra así? Y bajo sombra no entiendo imagen alguna del movimiento, ya que esta imagen no tendría por qué ser la imagen de *ese* movimiento precisamente. Pero la posibilidad de ese movimiento tiene que ser la posibilidad de ese movimiento precisamente. (¡Mira qué altas llegan aquí las olas del lenguaje!)

Las olas se calman en cuanto nos preguntamos: cuando hablamos de una máquina, ¿cuándo usamos la expresión «posibilidad del movimiento»?—Pero, ¿de dónde vinieron, entonces, esas extrañas ideas? Bueno, te muestro la posibilidad del movimiento, digamos, por medio de una *imagen* del movimiento: 'así pues, la posibilidad es algo semejante a la realidad'. Decimos de algo: «no se mueve todavía, pero tiene ya la posibilidad de moverse»; 'así pues, la posibilidad es algo muy próximo a la realidad'. Podemos dudar, quizá, de si tal y tal condición física hace posible este movimiento, pero no discutimos jamás si *esto es* la posibilidad de este o de aquel movimiento: 'así pues, la posibilidad del movimiento está en una relación particular con el movimiento mismo, una relación más estrecha que la de la imagen con su objeto', ya que puede dudarse de si esto es la imagen de este o de aquel objeto. Decimos: «la experiencia enseñará si esto es la posibilidad de este movimiento»: 'así pues, no es un hecho de experiencia que esta posibilidad sea precisamente la posibilidad de este movimiento'.

Prestamos atención a nuestro propio modo de expresión en referencia a estas cosas, pero no lo comprendemos, sino que lo malinterpretamos. Cuando filosofamos somos como salvajes, como hombres primitivos que oyen el modo de expresión de hombres civilizados, lo malinterpretan y sacan luego extrañas conclusiones de esa interpretación.

Imagina que alguien no entendiera nuestra forma verbal para el pretérito: «él ha estado aquí».—El dice: «'él *ha*', esto es

presente, por tanto, la proposición dice que el pasado es en cierto sentido presente».

126. «Pero no quiero decir que lo que hago ahora (al comprender) determine *causal* y experiencialmente el uso futuro, sino que, de modo *extraño*, ese mismo uso está en algún sentido presente.»—Pero, ¡naturalmente que 'en *algún* sentido' lo está! (Pues también decimos: «los acontecimientos del año pasado para mí están presentes».) Propiamente, en lo que dices sólo es falso la expresión: «de modo extraño». El resto es correcto; y la proposición parece extraña sólo si uno se imagina para ella otro juego de lenguaje diferente a aquel en que la usamos de hecho. (Alguien me dijo que de niño se había admirado de cómo el sastre '*cose un traje*', que él pensaba que esto significaba que un traje se produce por el *mero coser*, es decir, cosiendo hilos unos a otros.)

127. El uso incomprendido de la palabra se interpreta como expresión de un *proceso* extraño. (Del mismo modo que uno se imagina el tiempo como un medium extraño o el alma como un ser extraño.)

Pero la dificultad surge en todos estos casos por la confusión entre «es» y «se llama».

128. La conexión, que no tiene por qué ser causal, experiencial, sino mucho más estricta y dura, tan firme, incluso, que lo uno *sea* ya de algún modo lo otro, es siempre una conexión en la gramática.

129. ¿De dónde sé yo que esta imagen es mi representación del *sol*?—Yo la *llamo* representación del sol. La *uso* como imagen del *sol*.

130. «Es como si pudiéramos captar de un golpe el uso completo de la palabra.»—Y decimos que lo hacemos. O sea, a

veces, con esas palabras, describimos lo que hacemos. Pero en lo que sucede no hay nada sorprendente, extraño. Se convierte en extraño cuando nos sentimos inclinados a pensar que el desarrollo futuro ha de estar ya presente de algún modo en el acto de la comprensión, y no está presente, sin embargo.—Puesto que decimos que no hay duda de que entendemos la palabra..., pero, por otra parte, su significado reside en su uso. No hay duda de que quiero jugar ahora al *ajedrez;* pero el juego del ajedrez es tal juego *en virtud de todas sus reglas*, etc. ¿No conozco, entonces, el juego al que quería jugar, hasta que lo *he* jugado? ¿O es que todas las reglas están contenidas en mi acto intencional? ¿Es la experiencia la que me enseña que, usualmente, a este acto intencional sigue este modo de jugar? ¿No puedo estar seguro, entonces, de qué es lo que me propongo hacer? Y si esto es absurdo, ¿qué tipo de conexión superrígida existe entre el acto intencional y lo intencionado?—¿Dónde reside la conexión entre el sentido de las palabras «¡juguemos una partida de ajedrez!» y todas las reglas del juego?—En la lista de las reglas del juego, en la enseñanza de él, en la praxis diaria del jugar.

131. Las leyes lógicas son ciertamente expresión de 'hábitos de pensar', pero también del hábito *de pensar*. Esto es, puede decirse que muestran: cómo piensan los seres humanos y a *qué* llaman los seres humanos «pensar».

132. Frege denomina 'una ley de la estimación humana de lo verdadero' a: «A los seres humanos les resulta imposible... reconocer un objeto como diferente de sí mismo.»[7]—Si pienso que ello me resulta imposible es que pienso que *intento* hacerlo. Así, miro mi lámpara y digo: «esta lámpara es diferente de sí misma». (Pero nada se mueve.) No es que yo vea que es falso, sino que no puedo hacer absolutamente nada con ello. (Excepto cuando la lámpara brilla a la luz del sol: entonces sí puedo expresar muy bien esto por medio de esa proposición.) También

[7] *Grundgesetze der Arithmetik*, I, p. XVII. (*Nota de los eds.*)

puede uno imaginarse en una especie de convulsión intelectual en la que se *actúa* como si se intentara pensar lo imposible y no se consiguiera. De modo semejante, uno puede también *actuar* como si intentara (en vano) atraer hacia sí un objeto desde la distancia por un simple deseo. (Para ello se hacen, por ejemplo, ciertas muecas, como si se quisiera dar a entender al objeto por medio de gestos que ha de acercarse.)

133. Las proposiciones de la lógica son 'leyes del pensamiento', 'ya que expresan la esencia del pensar humano', pero más correctamente: ya que expresan, o muestran, la esencia, la técnica del pensar. Muestran lo que es el pensar, o también modos del pensar.

134. Puede decirse que la lógica muestra lo que nosotros entendemos por «proposición» y por «lenguaje».

135. Imagínate esta curiosa posibilidad: que nos hubiéramos equivocado siempre hasta ahora al multiplicar 12 × 12. Sí, es incomprensible cómo haya podido suceder, pero ha sucedido. Así pues, ¡todo lo que se ha calculado de este modo es falso!—Pero ¿qué importa eso? ¡No importa nada!—Algo falso ha de haber, pues, en nuestra idea de la verdad o falsedad de las proposiciones aritméticas.

136. Pero ¿es que es imposible que me haya equivocado en el cálculo? ¿Y si un demonio me confunde de modo que siempre vuelvo a pasar algo por alto, por muchas veces que repase el cálculo paso a paso? De modo que al despertar del hechizo dijera: «¿¡Pero bueno, es que estaba ciego!?»—Pero ¿qué diferencia hay si lo 'asumo'? Entonces podría decir: «Sí, bueno, el cálculo es ciertamente falso, pero así es como yo calculo. Y esto es lo que llamo ahora sumar, y este número, 'la suma de esos dos'.»

137. Imagina que alguien estuviera tan embrujado que calculara así:

3 3 3 3 2

| | | | | | | | | |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 por tanto, $4 \times 3 + 2 = 10$.

Ahora ha de aplicar su cálculo. Toma cuatro veces 3 nueces y 2 más y las repartes entre 10 personas; y cada una recibe *una* nuez: puesto que él las distribuye de acuerdo con los arcos de la operación, y siempre que da a alguien una segunda nuez, ésta desaparece.

138. Podría decirse también: en la demostración avanzas de proposición en proposición; pero ¿aceptas también un control para saber si has procedido correctamente?—¿O te limitas a decir: «*Tiene que* ser correcto», y confrontas todo lo demás con la proposición que has obtenido?

139. Puesto que si ello es *así*, lo único que haces es avanzar de imagen en imagen.

140. Podría resultar práctico medir con un patrón que tenga la propiedad de encogerse hasta la mitad de su longitud cuando es llevado de una habitación a otra. Una propiedad que, en otras circunstancias, le hiciera inservible como patrón medida.

En determinadas circunstancias, al enumerar los miembros de un conjunto podría resultar práctico prescindir de ciertas cifras; enumerarlos: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

141. ¿Qué sucede cuando alguien intenta que una figura coincida con su imagen especular desplazándola en el plano y no lo consigue? Las coloca una encima de otra de diferentes modos; mira a las partes que no coinciden, se siente satisfecho, dice por

ejemplo: «*tiene que* resultar», y vuelve a colocar juntas las figuras de otra manera.

¿Qué sucede cuando alguien intenta levantar un peso y no lo consigue porque resulta demasiado pesado? Se coloca en tal o tal postura, coge el peso y pone en tensión tales y tales músculos, luego lo deja y da muestras, por ejemplo, de insatisfacción.

¿En qué se muestra la imposibilidad geométrica, lógica, del primer intento?

«Bueno, él podría haber mostrado con otra imagen o de otra manera qué es lo que pretende con el segundo intento.» —Pero afirma que puede hacer esto también en el primer caso, haciendo que coincidan dos figuras iguales, *congruentes*. —¿Qué hemos de decir ahora? ¿Que esos dos casos son diferentes? Pero también en el segundo caso se trata de imagen y realidad.

142. Lo que ofrecemos son propiamente observaciones sobre la historia natural del hombre; y no curiosidades, sino constataciones de hechos de los que nadie ha dudado, y que eluden nuestra consideración sólo porque andan siempre ante nuestros ojos.

143. Enseñamos a alguien un método para repartir nueces entre personas; una parte de ese método es el multiplicar dos números en el sistema decimal.

Enseñamos a alguien a construir una casa; también cómo ha de conseguir las oportunas cantidades de material, de tablones, por ejemplo; y una técnica de cálculo para ello. La técnica de cálculo es una parte de la técnica de construcción de una casa.

Cierta gente vende y compra leña; los montones de leña se miden con un patrón, las medidas de longitud, anchura y altura se multiplican, y lo que de ahí resulta es el número de monedas que han de pedirse o darse por ello. No sabe 'por qué' sucede esto así, simplemente lo hace así: se hace así. —¿No calcula esa gente?

144. ¿Quien calcula así tiene que expresar una '*proposición* aritmética'? Es verdad que enseñamos a los niños la tabla de

multiplicar en forma de *frasecitas*, pero ¿es eso esencial? ¿Por qué no habrían simplemente de: *aprender a calcular*? Y si saben hacerlo, ¿no han aprendido aritmética?

145. Pero, ¿en qué relación está, entonces, la *fundamentación* de un procedimiento de cálculo con el cálculo mismo?

146. «Sí, comprendo que esta proposición se sigue de aquélla.» —¿Comprendo *por qué* se sigue, o comprendo sólo *que* se sigue?

147. Y qué si yo hubiera dicho: Aquella gente paga la madera *sobre la base del cálculo;* acepta el cálculo como prueba de que tiene que pagar tanto.—Bueno, esto es simplemente una descripción de su proceder (comportamiento).

148. Aquella gente —diríamos— venden la madera según el cubicaje; pero, ¿tienen razón al hacerlo así? ¿No sería más correcto venderla al peso —o según el tiempo de trabajo de la tala— o según el esfuerzo de la tala, medido de acuerdo a la edad y a la fortaleza del leñador? ¿Y por qué no habrían de ofrecerla a un precio independiente de todo eso?: cada comprador paga una cantidad y siempre la misma, sea cuanta sea la madera que tome (se ha llegado a la conclusión, por ejemplo, de que así se puede vivir). ¿Y hay que decir algo en contra de que se regale simplemente la madera?

149. Bien; pero, ¿y si apilaran la madera en montones de diferentes y discrecionales alturas y la vendieran luego a un precio proporcional al área de los montones?

¿Y qué, incluso, si justificaran ésto con las palabras: «Sí, quien compra más madera ha de pagar también más»?

150. ¿Cómo podría mostrarles ahora que —como yo diría— no compra realmente más madera quien compra un montón de mayor área? Tomaría, por ejemplo, un montón —según su idea— pequeño y lo convertiría en uno 'grande', disponiendo de otro modo los troncos. Esto *podría* convencerlos —aunque quizá dijeran: «sí, ahora es *mucha* madera y cuesta más» — y con ello se acabaría la cuestión.—En ese caso diríamos seguramente: sucede simplemente que por «mucha madera» y «poca madera» ellos no entienden lo mismo que nosotros; y ellos tienen un sistema de pago completamente diferente del nuestro.

151. (Una sociedad que actúa así nos recordaría, quizá, a la «gente lista» del cuento.)

152. Frege dice en el prólogo de los *Grundgesetze der Arithmetik*[8]: «...aquí nos encontramos con un tipo de locura desconocido hasta ahora», pero nunca se manifestó sobre la forma que realmente tomaría esa 'locura'.

153. ¿Dónde reside el acuerdo de los hombres respecto a la aceptación de una estructura como demostración? ¿En que usan palabras como *lenguaje*? Como aquello que nosotros llamamos «lenguaje».

Imagínate hombres que usaran dinero en las transacciones, a saber, monedas del mismo aspecto que las nuestras, de oro o de plata y grabadas; y que las intercambian también por mercancías, pero que cada uno da por las mercancías lo que le parece bien y que el comerciante no da al cliente más o menos según lo que pague; en una palabra, que este dinero, o lo que tiene un aspecto así, para ellos desempeña un papel totalmente diferente que para nosotros. Nos sentiríamos mucho menos cercanos a esas gentes que a aquellas que no conocen dinero alguno y que practican un modo primitivo de intercambio comercial.—«¡Pero las monedas

[8] *Ibíd.*, I, XVI.

de esa gente tendrán también una finalidad!»—¿Tiene una finalidad todo lo que se hace? Por ejemplo, los actos religiosos.

Es muy posible que nos inclináramos a llamar locas a las personas que se comportan así. Pero no llamamos, sin embargo, locos a todos aquellos que actuán de modo semejante dentro de las formas de nuestra cultura, que usan palabras 'sin finalidad alguna'. (¡Piensa en la coronación de un rey!)

154. A la demostración pertenece claridad. Si el proceso por el cual consigo el resultado fuera oscuro, es verdad que podría dar constancia de que resulta tal número; pero, ¿qué hecho ha de confirmármelo? No sé: 'qué *tiene que* resultar'.

155. ¿Sería posible que alguien repasara hoy nuestros cálculos y se sintiera satisfecho de sus resultados, pero quisiera mañana sacar otros diferentes, y otro día otros diferentes de nuevo?

En efecto, ¿no puede uno imaginarse que ello sucediera con cierta *legaliformidad* de este modo: si alguien da una vez *este* paso, '*precisamente por eso*' da la próxima vez otro diferente, y por eso (acaso) la próxima vez da de nuevo el primero? (De modo parecido a como sucedería en un lenguaje si en él el color que una vez se llama «rojo», se llamara por eso la próxima vez de otro modo y a la siguiente «rojo» de nuevo, etc.; esto podría resultar natural a la gente. Podría llamárselo una necesidad de cambio.)

[*Nota al margen:* ¿Son eternas e inmutables nuestras leyes de inferencia?]

156. ¿No sucede que mientras se piensa que no puede ser de otro modo, se sacan conclusiones lógicas?

Esto significa ciertamente: mientras *esto y esto no se pone en absoluto en cuestión.*

Los pasos que no se ponen en cuestión son conclusiones lógicas. Pero no es que *no* se les ponga en cuestión porque 'corresponden con certeza a la verdad' —o por cosas semejantes—, sino que esto es precisamente lo que se llama 'pensar', 'hablar', 'inferir', 'argumentar'. No se trata aquí en absoluto de

una correspondencia cualquiera de lo dicho con la realidad; más bien la lógica está *antes* de una correspondencia así; a saber, en el sentido en el que la determinación del método de medida está *antes* de la corrección o falsedad de una medida dada.

157. ¿Se determina experimentalmente si una proposición puede derivarse de otra?—¡Parece que sí! Puesto que escribo ciertas secuencias de signos y al hacerlo me dejo guiar por ciertos paradigmas, para ello es esencial, sin duda, que no pase por alto ningún signo, ni se pierda ningún signo de otro modo— y de lo que se produce en este proceso digo que se sigue.—Un argumento contra esto: si 2 y 2 manzanas dan sólo 3 manzanas, es decir, si hay ahí 3 manzanas después de que yo he puesto dos primero y dos después, no digo entonces: «2+2 no son, pues, siempre 4»; sino: «una ha de haberse extraviado de algún modo».

158. Pero, ¿hasta qué punto hago un experimento cuando me limito a *seguir* la demostración ya escrita? Podría decirse: «Cuando contemplas esa cadena de transformaciones, *¿no te parece también como si concordaran* con los paradigmas?»

159. Así pues, si hay que llamar a esto un experimento, lo llamaremos, en tal caso, un experimento psicológico.—La apariencia de concordancia puede muy bien fundarse en un engaño de los sentidos. Y así sucede, en efecto, a veces cuando nos equivocamos al calcular.

Se dice también: «Esto es lo que me sale a mí.» Y, efectivamente, se trata de un experimento que muestra que esto es lo que a *mí* me sale.

160. Se podría decir: el resultado del experimento es que al final, al llegar al resultado de la demostración, digo convencidamente: «Sí, así es».

161. ¿Un cálculo es un experimento?—¿Es un experimento el levantarme de la cama por las mañanas? ¿Y no podría ser eso un experimento que mostrara que, tras tales y cuales horas de sueño, tengo fuerza para levantarme?

¿Y qué le falta a ese acto para ser ese experimento? Sólo que no puede ser realizado con este fin, es decir, en conexión con una investigación de ese tipo. Algo es *experimento* por el uso que se hace de ello.

Un experimento en el que observamos la aceleración en caída libre ¿es un experimento físico, o es uno psicológico que muestra lo que ven las personas bajo tales circunstancias?—¿No puede ser ambas cosas? ¿No depende ello de su *entorno:* de lo que hacemos con él, de lo que decimos sobre él?

162. Cuando una demostración se concibe como experimento, entonces el resultado del experimento no es ciertamente lo que se llama resultado de la demostración. El resultado del cálculo es la proposición con la que se cierra; el resultado del experimento es que fui conducido desde esas proposiciones por esas reglas hasta esa proposición.

163. Nuestro interés, empero, no se fija en el hecho de que tales y tales (o todas las) personas han sido guiadados así por esas reglas (o han seguido tal camino); damos por supuesto que las personas —'si pueden pensar correctamente'— caminan *así.* Pero ahora hemos alcanzado un *camino* siguiendo las huellas de los que han caminado así. Y el tráfico por ese camino se produce ahora, con diferentes finalidades.

164. Ciertamente la experiencia me enseña cómo termina el cálculo; pero no por eso lo admito ya.

165. La experiencia me ha enseñado que esta vez ha resultado esto, que ello es lo que resulta normalmente; pero ¿dice esto la proposición de la matemática? La experiencia me ha

enseñado que he recorrido este camino. Pero ¿es *esto* el enunciado matemático?—¿Qué es lo que dice, entonces? ¿Qué relación guarda con esas proposiciones de experiencia? La proposición matemática posee la dignidad de una regla.

Esto es verdadero por razón de que la matemática es lógica: se mueve en las reglas de nuestro lenguaje. Y eso es lo que le proporciona su peculiar solidez, su lugar privilegiado e inexpugnable.

(La matemática depositada entre las normas originarias.)

166. Pero ¿cómo? ¿Da vueltas *para acá* y *para allá* en esas reglas?—Produce siempre nuevas y nuevas reglas: construye siempre nuevas carreteras para el tráfico; ampliando la red de las viejas.

167. Pero ¿no necesita aprobación para ello? ¿Es que puede ampliar *arbitrariamente* la red? Ahora podría yo decir: el matemático inventa siempre nuevas formas de representación. Unas, estimuladas por necesidades prácticas; otras, por necesidades estéticas, y varias otras aún. E imagínate aquí un arquitecto de jardines que diseña caminos para una instalación jardinera; puede muy bien suceder que los trace sobre el tablero de dibujo meramente como bandas ornamentales y no piense en absoluto que alguien caminará por ellos un día.

168. El matemático es un inventor, no un descubridor.

169. La experiencia enseña, al contar que, si usamos para ello los dedos de una mano o cualquier otro grupo de cosas como éste | | | | | y contamos siguiéndolo: yo, tú, yo, tú, etc., la primera palabra es también la última. «Pero ¿no *tiene que* ser así?»—¿Es que resulta inimaginable que alguien vea el grupo | | | | |, por ejemplo, como grupo | | || | |, en el que las dos rayas centrales están fusionadas y, por consiguiente, la raya central cuenta por dos? (Sí, aunque no es el caso usual.)

170. Pero ¿qué sucede cuando, en primer lugar, hago notar a alguien que el resultado del contar está ya predeterminado por el comienzo, y él lo entiende y dice: «Sí, es verdad, y tiene que ser así.» ¿Qué clase de conocimiento es eso?—Quizá ha dibujado este esquema:

I Y I Y I
| | | | |

Y quizá su razonamiento sea: «Claro que es *así* cuando cuento. Por tanto, tiene que...»

171. En conexión con esto: a veces nos gustaría decir «pero tiene que haber una razón por la que —en un movimiento de una sonata, por ejemplo— a este tema le siga precisamente *ese* otro». Admitiríamos como razón una cierta relación de ambos temas, un parentesco, un contraste o cosas semejantes.—Pero nosotros mismos podemos construir una relación así: una operación, por así decirlo, que saque un tema del otro; pero esto nos sirve sólo si esa relación nos resulta familiar. Por tanto, es como si la secuencia de esos temas hubiera de corresponder a un paradigma ya presente en nosotros.

De modo semejante podría decirse de un cuadro que representara dos formas humanas: «Tiene que haber una razón por la cual precisamente *esas* caras nos producen una impresión tal.» Esto significa: nos gustaría volver a encontrar esa impresión de las dos caras en otra parte, en otro ámbito diferente.—Pero ¿podrá volver a encontrarse?

Podría también preguntarse: ¿Qué combinación de temas tiene *interés* y cuál *no*? O bien: *¿Por qué* esa combinación tiene interés y *ésta* no? ¡Esto puede que no sea fácil de decir! A menudo podemos decir: «Esta corresponde a un gesto, ésta no».[9]

---

[9] Esta observación estaba al final del texto mecanografiado, dividido en trozos, que es la fuente de esta Parte I y del Apéndice I que sigue. (Cfr. Prólogo, p. 9. Pero su lugar en la colección de recortes no está muy claro, y por esta razón los editores no incluyeron la observación en la primera edición. Es incierto si las palabras «En conexión con esto» se refieren a las observaciones 169 y 170, que preceden. También en el texto mecanografiado la observación iba entre paréntesis. (*Nota de los eds.*)

APENDICE I
1933-1934

1. ¿No podría decir que dos palabras —«non» y «ne», por ejemplo— tienen el mismo significado, que ambas son signos de negación y, sin embargo,

$$\text{non non } p = p$$

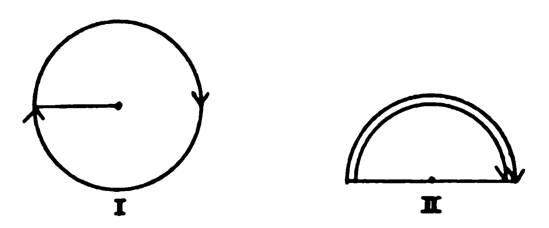
mientras que

$$\text{ne ne } p = \text{ne } p?$$

(En el lenguaje hablado una doble negación significa muy a menudo una negación.) Pero ¿por qué llamo, entonces, «negaciones» a ambas? ¿Qué tienen en común? Bien, está claro que tienen en común gran parte de su uso. Pero esto no soluciona aún nuestro problema. Pues, a pesar de todo, nos gustaría decir: basta que interpretemos oportunamente la duplicación y valdrá para ambas: que una doble negación es una afirmación. Pero *¿cómo*? Tal como, por ejemplo, puede expresarse por medio de paréntesis:

$$(\text{ne ne})p = \text{ne } p, \qquad \text{ne}(\text{ne } p) = p$$

Pensamos inmediatamente en un caso análogo de la geometría: «Si se suman dos medias vueltas se anula una a otra», «si se suman dos medias vueltas componen una media vuelta».



Depende justamente de cómo las sumemos. (De si las acoplamos en derivación o en serie.)

2. (Topamos aquí con un fenómeno notable y característico dentro de las investigaciones filosóficas: la dificultad —podría decir— no es encontrar la solución, sino reconocer algo como solución: ya lo hemos dicho todo.—¡La solución no es algo deducido, sino justamente *esto*!

Creo que esto tiene que ver con el hecho de que esperamos equivocadamente una explicación; mientras que la solución del problema es una descripción, con tal que la coloquemos debidamente en nuestra consideración. Cuando nos quedamos en ella y no intentamos ir más allá.

3. «Esto es todo lo que puede decirse al respecto.» *Interpretar* «non non *p*» como negación de la proposición negada supone en un caso concreto algo así como: dar una explicación del tipo «non non *p* = non (non *p*)».

4. «Si 'ne' es una negación, entonces 'ne ne *p*', si se entiende apropiadamente, tiene que ser igual a *p*.»

«Si se toma a 'ne ne *p*' como negación de *p* hay que entender de otro modo la duplicación.»

Estaría por decir: «'Duplicación' *significa* en este caso algo diferente, *por eso* produce ahora una negación»; o sea: el que produzca ahora una negación es consecuencia de su diferente naturaleza. «Ahora la entiendo como refuerzo», diríamos. *Nosotros* juzgamos del significado mediante la expresión del significado[1].

5. Cuando pronuncié la doble negación, ¿dónde me fundaba para considerarla como refuerzo? En las circunstancias en las que uso la expresión, quizá en la imagen que me ronda la cabeza al hacerlo, o en la imagen que usé, en el tono de mi discurso (en el tono puedo reproducir también los paréntesis de «ne (ne *p*)»). Entender la duplicación como refuerzo corresponde, pues, a esto: expresarla como refuerzo. Entender el acto de la duplicación como anulación fue, por ejemplo, colocar los paréntesis.—«Sí, pero esos paréntesis mismos pueden desempeñar diferentes papeles; puesto que ¿quién dice que en 'non (non *p*)', en sentido usual, han de entenderse como paréntesis y no, por ejemplo, el primero como trazo de separación entre los dos 'non', y el segundo como punto final de la proposición?»—Nadie lo dice. Y tú has vuelto ahora a sustituir por palabras tu concepción de ello. Lo que signifiquen los paréntesis se mostrará en su uso y, en otro sentido, posiblemente ello se funde en el ritmo de la impresión visual de 'non (non *p*)'.

6. ¿He de decir ahora que los significados de «non» y «ne» sean *algo* diferentes? ¿Que sean diferentes especies de negación? Nadie diría eso. Puesto que, como alguien objetaría, ¿no significaría, entonces, «¡no entres en esa habitación!» exactamente lo mismo que usualmente cuando establecemos la regla de que «no no» tiene que ser usado como negación?—A ello objetaría-

[1] En el manuscrito se indicaban varias alternativas a esta última frase.: «Dirigimos nuestra mirada a la expresión del significado.» «*Nosotros* ponemos la expresión del significado en vez del significado.» «*Nosotros* investigamos la expresión del significado.» «*Nosotros* fijamos nuestra mirada en la *expresión* del significado.» «Dirige tu mirada a la expresión del significado.» (*Nota de los eds.*)

mos, sin embargo: «Si ambas proposiciones, 'ne *p*' y 'non *p*', dicen exactamente lo mismo ¿cómo es que 'ne ne' no significa lo mismo que 'non non'?» Pero aquí presuponemos ya justamente un simbolismo —es decir, tomamos uno como modelo— en el que de «ne $p=$non p» se sigue que «ne» y «non» pueden ser usados del mismo modo en todos los casos.

El giro de 180° y la negación son de hecho lo mismo en un caso concreto, y la aplicación de la proposición 'non non $p=p$', del mismo tipo que la aplicación de una determinada geometría.

7. ¿Qué quiere decirse con 'ne ne *p*', aunque por convención signifique 'ne *p*', *podría* usarse también como negación anulada?—Estaríamos por decir: con el significado que le hemos dado, 'ne' podría anularse a sí mismo sólo con que lo aplicáramos correctamente. ¿Qué quiere decirse con ello? (Las dos medias vueltas en la misma dirección podrían anularse a sí mismas si fueran combinadas apropiadamente.) «El *movimiento* de negación 'ne' es capaz de anularse a sí mismo.» Pero ¿dónde está ese movimiento? Nos gustaría hablar naturalmente de un movimiento mental de la negación, para cuya ejecución 'ne' diera sólo la señal.

8. Podemos imaginarnos seres humanos con una lógica primitiva en la que sólo para ciertas proposiciones hay algo correspondiente a nuestra negación; para aquellas, por ejemplo, que no contienen negación alguna. En el lenguaje de estos seres humanos se podría negar, entonces, una proposición como «él va a esa casa», pero ellos entenderían una duplicación de la negación como mera repetición, nunca como anulación de la negación.

9. La pregunta de si para esos seres humanos la negación tiene el mismo significado que para nosotros sería análoga, entonces, a la de si la cifra '2' tiene el mismo significado para nosotros que para seres humanos cuya serie numeral acabara con el 5.

10. Supón que preguntara: cuando pronunciamos la proposición «esta barra mide 1 m de longitud» y «aquí hay 1 soldado», ¿se nos muestra claramente que con «1» nos referimos a cosas diferentes, ya que «1» tiene significado diferente?—No se nos muestra en absoluto. Especialmente cuando decimos una proposición como: «En cada 1 metro hay un soldado en 2 m 2 soldados, etcétera.» Ante la pregunta «¿te refieres a lo mismo con los dos unos?», responderíamos algo así: «¡naturalmente que me refiero a lo mismo: a *uno*!» (y al hacerlo levantaríamos un dedo, por ejemplo).

11. Quien llama a «$\sim \sim p = p$» (o también a «$\sim \sim p \equiv p$») una «proposición necesaria de la lógica» (no una determinación con respecto al tipo de representación adoptado por nosotros) tiene también la tendencia a decir que esa proposición procede del significado de la negación. Cuando en un dialecto se usa la doble negación como negación, como en «él no ha encontrado nada en ninguna parte», nos inclinamos a decir: *propiamente* esto significa que él ha encontrado algo en todas partes. ¡Consideremos qué quiere decir ese «propiamente»!

12. Supongamos que tuviéramos dos sistemas de medición de longitudes; una longitud se expresa en ambos por medio de un signo numeral seguido de una palabra que indica el sistema de medida. Uno de los sistemas designa una longitud como «*n* pies» y pie es una unidad de medida en sentido usual; en el otro sistema una longitud viene designada por «*n* W» y

$$1 \text{ pie} = 1 \text{ W}$$

Pero: 2 W = 4 pies, 3 W = 9 pies, etc. Así pues, la proposición «esta barra tiene 1 W de longitud» dice lo mismo que «esta barra tiene 1 pie de longitud». Pregunta: ¿Tienen «W» y «pie» el mismo significado en esas dos proposiciones?

13. La pregunta está mal formulada. Esto se ve si expresamos la igualdad de significado mediante una ecuación. En ese

caso la pregunta sólo puede rezar: «¿Es W=pie o no lo es?»—Las proposiciones en las que aparecen esos signos desaparecen bajo esta consideración.—Naturalmente, tampoco puede preguntarse en esta terminología si «es» significa lo mismo que «es»; pero sí si «ε» significa lo mismo que «=». Bien, ya dijimos: 1 pie=1 W, pero: pie≠W.

14. ¿Tiene «ne» el mismo significado que «non»?—¿Puedo poner «ne» en lugar de «non»?—«Bueno, en ciertos lugares sí, en otros no».—Pero no preguntaba nada de ello. Mi pregunta era: ¿puede usarse sin más «ne» en lugar de non»?—No.

15. «En *este* caso 'ne' y 'no' quieren decir exactamente lo mismo.» Qué? «Bueno, que *no* hay que hacer esto ni esto».» Pero con ello sólo has dicho que en este caso sucede que ne p=non p y eso no lo negamos nosotros.

Cuando explicas: ne ne p=ne p, non non $p=p$, usas ambas palabras de modo diferente; y si uno se aferra a la idea de que lo que producen en determinadas combinaciones 'depende' de su significado, del significado que traen con ellas, entonces hay que decir que han de tener diferentes significados si, combinadas del mismo modo, pueden producir diferentes resultados.

16. Nos gustaría hablar, por ejemplo, de la *función*, del modo de actuar de la palabra en esa proposición. Como de la función de una palanca en una máquina. Pero, ¿en qué consiste esa función? ¿Cómo se manifiesta? ¡Puesto que no hay nada oculto! Vemos, efectivamente, la proposición entera. La función ha de mostrarse a lo largo del cálculo.

Pero nos gustaría decir: «'non' hace lo mismo que 'ne' con la proposición 'p': la da la vuelta». Pero esto son nada más que otras palabras para: «non p=ne p»[2]. Siempre de nuevo la idea, la imagen, de que lo que vemos de los signos sólo es un lado externo de un interior donde se producen las operaciones propias del pensar.

---

[2] [Nota al margen:] ¿Qué significa «ne non p» y «non ne p»?

17. Pero si el uso del signo es su signficado, ¿no resulta curioso que yo diga que la palabra «es» se usa con dos significados diferentes (como 'ε' y '=') y no se me ocurra decir que su significado sea su uso como cópula y signo de igualdad?

Diríamos que esos dos tipos de uso no producen *un* significado; que la unión personal mediante la misma palabra es inesencial, mero accidente.

18. Pero ¿cómo puedo decidir cuál es un rasgo esencial y cuál uno inesencial, accidental, de la notación? ¿Hay una realidad tras la notación por la que se rija su gramática?

Pensemos en un caso semejante del juego: en el juego de damas una dama se distingue por dos fichas superpuestas. ¿No diríamos que es inesencial al juego de damas que una dama se distinga así?

19. Digamos: el significado de una ficha (de una figura) es su papel en el juego.—Y bien, antes del comienzo de toda partida de ajedrez se decide a la suerte qué jugador sale con las blancas. Para ello, uno de los jugadores mantiene en cada una de sus manos cerradas un rey y el otro elige al azar una de ellas. ¿Se considerará parte del papel del rey en el ajedrez ese uso suyo para echar suertes?

20. Así pues, también en el juego me inclino a distinguir entre reglas esenciales e inesenciales. El juego, diríamos, no sólo tiene reglas sino también su gracia.

21. ¿Para qué la misma palabra? ¡En el cálculo no hacemos uso alguno de esa igualdad! ¿Para qué las mismas fichas para ambos?—Pero ¿qué significa aquí «hacer uso de la igualdad»? ¿No es un uso ya precisamente el usar la misma palabra?

22. Aquí parece ahora como si el uso de la misma palabra, de la misma ficha, tuviera una *finalidad* —cuando la igualdad no

es accidental, inesencial. Y como si la finalidad fuera reconocer la ficha y saber cómo hay que jugar. ¿Se trata ahí de una posibilidad física o de una lógica? Si lo último, entonces la igualdad de las piezas pertenece al juego.

23. ¡Pero el juego sí ha de estar determinado por las reglas! Así pues, si una regla prescribe que hay que tomar los reyes para echar a suertes antes de una partida de ajedrez, ello pertenece, esencialmente, al juego. ¿Qué podría objetarse a ello?—Que no se ve la gracia de esa regla. Como no se ve, por ejemplo, la gracia de una prescripción que obligara a dar tres vueltas a cada pieza antes de moverla. Si encontráramos esa regla en un juego de tablas nos sorprenderíamos y haríamos suposiciones sobre el origen, finalidad, de una regla así. («¿Habría de impedir esa prescripción que uno mueva sin reflexión?»)

24. «Si entiendo correctamente el carácter del juego», podría decir, «entonces eso no pertenece esencialmente a él».

25. Imaginémonos, sin embargo, ambos oficios reunidos en una sola persona como una antigua convención.

26. Se dice: el uso de la misma palabra es *aquí* inesencial porque la igualdad de su forma no vale aquí para mediar una transición. Pero con ello se describe sólo el carácter del juego que quiere jugarse.

27[3]. «¿Qué significa la palabra 'a' en la proposición 'F(a)'»? «¿Qué significa la palabra 'a' en la proposición 'Fa' que acabas de decir?» «¿Qué significa la palabra... en esa proposición?»

---

[3] Esta observación aparecía escrita a mano en el reverso de la hoja. (*Nota de los editores.*)

APENDICE II

1. Lo sorprendente puede desempeñar en la matemática dos tipos de papel completamente diferentes.

Puede verse el valor de una sucesión matemática de ideas en el hecho de que saca a la luz algo que nos sorprende: porque es de gran interés, de gran importancia, ver cómo un estado de cosas se vuelve sorprendente, o extraño, incluso paradójico por tal o tal tipo de representación suya.

Pero diferente de esto es una concepción que domina hoy, para la que lo sorprendente, lo extraño es valioso porque muestra hasta qué profundidad llega la investigación matemática; así como podríamos medir el valor de un telescopio por el hecho de que nos muestra cosas que sin ese instrumento no hubiéramos podido *barruntar* siquiera. El matemático dice, pongamos por caso: «¿Ves? Esto es importante, sin mí no lo habrías sabido.» Como si mediante esas consideraciones, cual si fueran un tipo de experimento superior, se trajeran a la luz hechos extraños, los más extraños incluso.

2. Pero el matemático no es un descubridor, sino un inventor.

«¡La demostración tiene un resultado sorprendente!»—Si te

sorprende es que aún no lo has entendido. Puesto que aquí la sorpresa no es legítima, como en el caso del resultado de un experimento. *Ahí* —me gustaría decir— es permisible sucumbir ante su atractivo; pero no cuando te llega al final de una cadena de inferencias. Puesto que en esa cadena la sorpresa sólo es un signo de que todavía reina la falta de claridad o un malentendido.

«Pero ¿por qué no he de sorprenderme de que haya sido llevado *hasta ahí*?»—Imagina que tuvieras ante ti una expresión algebraica larga; parece, en principio, como si no pudiera abreviarse esencialmente; pero después ves una posibilidad de abreviación, que continúa ahora hasta que la expresión se reduce hasta una forma compacta. ¿No podemos sorprendernos de este resultado? (Al hacer solitarios sucede algo semejante.) Ciertamente, y se trata de una sorpresa agradable; y tiene interés psicológico, puesto que muestra un fenómeno de falta de visión de conjunto y de cambio del aspecto que ofrece un complejo visto. Es interesante que no se vea siempre en ese complejo que puede abreviársele de ese modo; pero si tenemos una visión de conjunto del camino de abreviatura, desaparece la sorpresa.

No representa con plena corrección este estado de cosas el decir que se está sorprendido de haber sido conducido *hasta ahí*. Puesto que esa sorpresa sólo se tiene cuando no se conoce todavía el camino. No cuando se le ve entero delante. No es ninguna sorpresa el que ese camino que tengo entero ante mí comience ahí donde comienza y termine ahí donde termina. La sorpresa y el interés vienen, por decirlo así, de fuera. Me refiero a lo siguiente: puede decirse «esta investigación matemática tiene gran interés psicológico», o «gran interés físico».

3. Siempre vuelve a asombrarme este giro del tema; a pesar de que lo he oído incontables veces y lo sé de memoria. Quizá consista su *sentido* en despertar asombro.

¿Qué se supone que significa el que yo diga: «¡No te está *permitido* asombrarte!»

Piensa en los acertijos matemáticos. Son propuestos porque sorprenden; ése es todo su sentido.

Yo diría: no has de creer que aquí hay algo escondido en lo que no puede penetrarse, como si hubiéramos andado por un

camino subterráneo y saliéramos ahora en algún punto a la luz, pero sin poder saber cómo hemos llegado hasta ahí, o cuál es la situación de la entrada del túnel respecto a su salida.

Pero ¿cómo puede uno siquiera fantasear tal cosa? ¿Qué es lo que en el cálculo se asemeja a un movimiento bajo la tierra? ¿Qué pudo sugerirnos tal imagen? Creo que ninguna luz del día ilumina esos pasos; que entendemos el punto inicial y final de un cálculo en un sentido en el que no entendemos el resto del discurrir del cálculo.

4. «¡Aquí no hay misterio alguno!» Pero, ¿cómo pudimos *creer* entonces que había uno?—Bueno, he vuelto siempre a andar el camino y siempre he vuelto a sorprenderme; y nunca se me ha ocurrido la idea de que aquí haya algo que *comprender*. «Aquí no hay misterio alguno» quiere decir, pues, ¡Mira a tu alrededor!

5. ¿No es como si viéramos en una operación de cálculo una especie de cartomancia? Hemos barajado las cartas; no sabemos lo que ha sucedido al hacerlo: pero al final esa carta estaba arriba y eso significa que va a llover.

6. Diferencia entre el echar a suertes y el hacerlo por recuento antes de un juego. Pero ¿no podrían seres humanos primitivos, también, en un caso grave, servirse del recuento para elegir a un hombre en vez de echarlo a suertes?

7. ¿Qué hace quien llama nuestra atención sobre el hecho de que al contar el resultado ya está fijado?

8. Yo diría: «No tenemos una visión de conjunto sobre lo que hemos hecho y por ello eso nos resulta misterioso». Puesto que ahora tenemos delante un resultado, y no sabemos ya, no tenemos claro, cómo hemos llegado a él, pero decimos (hemos

aprendido a decir): «así ha de ser»; y lo aceptamos, y nos asombramos de ello. ¿No podríamos imaginar el caso siguiente?: Alguien ha escrito una serie de órdenes de la forma «ahora tienes que hacer esto y esto», cada una en una carta. Baraja esas cartas, lee la que ha quedado arriba, y dice: así pues, *¿tengo que* hacer *esto*?—Ya que el leer una orden escrita produce una impresión determinada, un efecto determinado. Y lo mismo también el llegar a la conclusión de una inferencia.—Pero podría quizá romperse el hechizo de una orden así poniendo otra vez claramente ante los ojos de esa persona *cómo* ha llegado a esas palabras y lo que ha sucedido ahí, comparando con otros casos, diciendo, por ejemplo: «¡Pero nadie te ha dado esa orden!»

¿Y no sucede *eso* también cuando digo: «aquí no hay secreto alguno»?—En cierto sentido tampoco él había creído que había un misterio. Pero estaba bajo la *impresión* del misterio (como el otro bajo la *impresión* de una orden). Es verdad que en *un* sentido él conocía la situación, pero se relacionó con ella (en el sentimiento y en el obrar) 'como si de lo que se tratara fuera de otro estado de cosas', como diríamos.

9. «En relación con algo no definido una definición sólo hace que llevarte un paso atrás.» ¿Qué nos dice esto? ¿Había alguien que no lo supiera?—No; pero ¿no pudo él perderlo de vista?

10. O: «Si escribes

'1, 4, 9, 16, ...',

sólo has escrito cuatro números y tres puntitos», ¿qué quieres poner de relieve con ello? ¿Podría alguien creer otra cosa? En un caso así también puede decirse a alguien: «Con ello no has hecho más que escribir cuatro signos numerales y un quinto signo, los puntitos». Bien, ¿no sabía él esto? Pero, ¿no podría decir él?: Sí, realmente, nunca he considerado los puntitos como *un* signo más en esa serie de signos, sino como una especie de indicación de otros signos numerales.

11. O ¿qué sucede cuando se hace notar que una línea en sentido euclidiano es un límite de color y una raya; y un punto, la intersección de tales límites de color y no una mota? (Cuán a menudo se ha dicho que uno no puede representarse un punto.)

12. Uno puede pensar, vivir en la ilusión, de que esto es así, sin *creerlo;* o sea, cuando a alguien se le pregunta, lo sabe, pero si no tiene que contestar a la pregunta, *no* lo sabe, sino que actúa y piensa según otro punto de vista.

13. Pues una forma expresiva nos permite actuar de tal y tal modo. Cuando domina nuestro pensamiento, nos gustaría decir, a pesar de todas las objeciones: «*sin embargo*, esto es así en cierto sentido». Aunque ello dependa precisamente de ese 'cierto sentido'. (De modo semejante casi a cuando se significa la deshonestidad de una persona al decir de ella: *no* es un *ladrón*.)

APENDICE III

1. Es fácil imaginarse un lenguaje en el que no haya forma interrogativa ni forma imperativa, sino que la pregunta y la orden se expresen en forma enunciativa, por ejemplo, en formas correspondientes a nuestra: «me gustaría saber si...» y «mi deseo es que...».

Nadie diría de una pregunta (por ejemplo, respecto a si llueve fuera) que es verdadera o falsa. Pero, ciertamente, en castellano se dice eso de una proposición como «desearía saber si...». ¿Y si se empleara siempre esa forma en lugar de la interrogación?

2. La gran mayoría de las proposiciones que decimos, escribimos o leemos son proposiciones enunciativas.

Y – dices – estas proposiciones son verdaderas o falsas. O, como yo podría decir también, con ellas se juega el juego de las funciones de verdad. Pues el aserto no es algo que se añada a la proposición, sino un rasgo esencial del juego que jugamos con ella. Comparable, digamos, a lo característico del ajedrez, que hay en él un ganar y un perder y que gana quien come al otro el rey. Ciertamente podría haber un juego muy parecido, en determinado sentido, al ajedrez, un juego que consistiera en realizar los movimientos del ajedrez pero sin que hubiera en ello un ganar y un perder, o las condiciones del ganar fueran otras.

3. Imagina que alguien dice: una orden se compone de una propuesta ('suposición') y del ordenar lo propuesto.

4. ¿No podría ejercerse la aritmética sin que se le ocurriera a uno la idea de pronunciar *proposiciones* aritméticas y sin que advirtiéramos jamás la semejanza de una multiplicación con una proposición?

Pero ¿no menearíamos la cabeza cuando alguien nos mostrara una multiplicación mal hecha, como lo hacemos cuando alguien nos dice que llueve cuando no llueve?—Sí; y aquí hay un punto de conexión. Pero también hacemos gestos recriminantes cuando, por ejemplo, nuestro perro no se comporta como queremos.

Estamos acostumbrados a decir «2 por 2 son 4» y el verbo «son» hace de ello una proposición y establece aparentemente un parentesco próximo con todo lo que llamamos 'proposición'. Mientras que se trata sólo de una relación muy superficial.

5. ¿Hay proposiciones verdaderas en el sistema de Russell, que no pueden ser demostradas en él?—¿A qué se llama, entonces, proposición verdadera en el sistema de Russell?

6. ¿Qué significa, pues, que una proposición '*es verdadera*'? '*p*' *es verdadera* = *p*. (Esta es la respuesta.)

Así pues, nos gustaría preguntar: ¿bajo qué circunstancias se afirma una proposición? O: ¿cómo se usa en el juego de lenguaje la afirmación de una proposición? Y la 'afirmación de una proposición' es aquí algo opuesto a la pronunciación de una proposición como ejercicio práctico de lenguaje, por ejemplo, o como *parte* de otra proposición, o cosas semejantes.

Por tanto, si se pregunta en este sentido: «¿Bajo qué circunstancias se afirma una proposición en el juego de Russell?», la respuesta es: Al final de una de sus demostraciones, o como 'ley fundamental' (Pp.). No hay otro modo de usar en este sistema proposiciones enunciativas del simbolismo de Russell.

7. Pero ¿no puede haber proposiciones verdaderas, que estén escritas en ese simbolismo, pero que no sean demostrables en el sistema de Russell?»—'Proposiciones verdaderas' son, pues, proposiciones que son verdaderas en *otro* sistema, es decir, que pueden ser afirmadas con derecho en otro juego. Ciertamente, ¿por qué no puede haber proposiciones así? O más bien: ¿por qué no han de escribirse proposiciones —de la física, por ejemplo— en el simbolismo de Russell? La pregunta es del todo análoga a ésta: ¿Puede haber proposiciones verdaderas en el lenguaje de Euclides, que no sean demostrables en su sistema, pero sean verdaderas?—Pero hay incluso proposiciones que son demostrables en el sistema de Euclides pero *falsas* en otro sistema. ¿No puede haber triángulos —en otro sistema— que sean semejantes (*muy* semejantes) sin tener ángulos iguales?—«¡Pero esto es una broma! ¡Puesto que en ese caso no son 'semejantes' en el mismo sentido!»—Ciertamente no; y una proposición que no puede demostrarse en el sistema de Russell es 'verdadera' o 'falsa' en otro sentido que una proposición de los *Principia Mathematica*.

8. Me imagino que alguien me pidiera consejo; dice: «He construido una proposición (la designaré por '*P*') en el simbolismo de Russell y mediante ciertas definiciones y transformaciones se la puede interpretar de modo que diga: '*P* no es demostrable en el sistema de Russell'. ¿No he de decir ahora de esa proposición que, por una parte, es verdadera, mientras que, por otra, es indemostrable? Pues, suponiendo que fuera falsa, ¡entonces es verdad que es demostrable! Y esto no puede ser. Y si está demostrada, entonces está demostrado que ella no es demostrable. De modo que no puede ser más que verdadera pero indemostrable».

Igual que preguntamos: «¿en qué sistema 'demostrable'?», hemos también de preguntar: «¿en qué sistema 'verdadera'?». 'Verdadera en el sistema de Russell' significa, como se ha dicho: demostrada en el sistema de Russell; y 'falsa en el sistema de Russell' quiere decir: lo contrario está demostrado en el sistema de Russell.—¿Qué significa ahora tu: «supuesto que sea falsa»? *En el sentido de Russell* significa: 'supuesto que en el sistema de Russell esté demostrado lo contrario'; *si ésta es tu suposición*, renunciarás ahora a tu interpretación de que es indemostrable. Y bajo 'esa

interpretación' entiendo la traducción a esa proposición castellana.—Si supones que la proposición es demostrable en el sistema de Russell, entonces es verdadera *en el sentido de Russell* y hay que volver a rechazar la interpretación «*P* no es demostrable». Si supones que la proposición es verdadera en el sentido de Russell, entonces se sigue lo *mismo*. También: no contradice que la proposición sea falsa, en otro sentido que en el de Russell, el que esté demostrada en el sistema de Russell. (Lo que en el ajedrez significa «perder», puede ser en otro juego ganar.)

9. ¿Qué significa, pues, *P* y «*P* es indemostrable» son la misma proposición? Significa que esas *dos* proposiciones castellanas tienen *una* expresión en tal y tal notación.

10. «Pero *P* no puede ser demostrable, puesto que, suponiendo que estuviera demostrada, estaría demostrada la proposición que dice de ella misma que no es demostrable.» Pero si ello estuviera demostrado, o si yo creyera —quizá por error— que lo había demostrado, ¿por qué no había de dejar valer la demostración y decir que tenía que volver a retirar mi interpretación de «*indemostrable*»?

11. Supongamos que demuestro la indemostrabilidad (en el sistema de Russell) de *P*; entonces, con esa demostración he demostrado *P*. Y si esa demostración fuera tal en el sistema de Russell, entonces habría demostrado al mismo tiempo su pertenencia y su no pertenencia al sistema de Russell.—Eso sucede por construir tales proposiciones.—¡Pero aquí hay, ciertamente, una contradicción!—Bien, entonces hay aquí una contradicción. ¿Importa algo?

12. ¿Importa la contradicción que surge cuando alguien dice: «Miento.—Por tanto no miento.—Por tanto miento, etc.»? Quiero decir: ¿es nuestro lenguaje menos utilizable porque, en ese caso, de una proposición pueda seguirse, según las reglas usuales,

su contrario y viceversa?—La proposición *misma* es inutilizable e igualmente esa deducción; pero ¿por qué no hay que hacerlo? ¡Se trata de un arte poco lucrativo!—Es un juego de lenguaje que guarda semejanza con el juego de coger el pulgar.

13. Una contradicción tal alcanza interés sólo porque ha preocupado a ciertos seres humanos y muestra, por ello, cómo pueden surgir del lenguaje problemas preocupantes; y qué clase de cosas pueden preocuparnos.

14. Una demostración de la indemostrabilidad es casi una demostración geométrica; una demostración referente a la geometría de las demostraciones. Del todo análoga a una demostración de que tal y tal construcción no es realizable con compás y regla. Una demostración así contiene un elemento de predicción, un elemento físico. Puesto que a consecuencia de esa demostración decimos a una persona: «No te esfuerces en encontrar una construcción (de la trisección del ángulo, por ejemplo), puede demostrarse que no es posible.» Esto quiere decir: es esencial que la prueba de la indemostrabilidad sea capaz de ser aplicada de ese modo. Ha de ser para nosotros —podría decirse— una *razón terminante* abandonar la búsqueda de una demostración (esto es, de una construcción de tal y tal tipo).

Una contradicción es inutilizable como predicción de ese tipo.

15. Llamar a algo, con razón, la proposición «*X* es indemostrable» depende de cómo demostremos esa proposición. Sólo la demostración muestra qué es lo que cuenta como criterio de indemostrabilidad. La demostración es una parte del sistema de operaciones, del juego, en el que la proposición es usada, y nos muestra su 'sentido'.

La cuestión es, pues, si la 'demostración de la indemostrabilidad de *P*' es aquí una razón terminante para suponer que no se encontrará una demostración de *P*.

16. La proposición «*P* es indemostrable» después de ser demostrada tiene un sentido diferente a antes.

Si está demostrada es la figura terminal de la demostración de indemostrabilidad.—Si no está demostrada, entonces no está *claro* aún *qué* ha de contar como criterio de su verdad, y su sentido —puede decirse— está velado todavía.

17. ¿Cómo he de suponer que *P* está demostrada? ¿Mediante una demostración de indemostrabilidad? ¿O de otra manera? Supón que mediante una demostración de indemostrabilidad. ¡Ahora, para ver *lo que* está demostrado, mira a la demostración! Quizá esté demostrado aquí que tal y tal forma de la demostración no conduce a *P*.—O bien, supón que *P* está demostrada de modo directo —como yo diría en este caso—, entonces se sigue la proposición «*P* es indemostrable» y tiene que mostrarse ahora cómo esa interpretación de los símbolos de *P* colisiona con el hecho de la demostración y por qué hay que abandonarla aquí.

Pero supongamos que no *P* esté demostrada.—¿*Cómo* demostrada? Quizá porque *P* está demostrada directamente, ya que de ahí se sigue que ello es demostrable y, por tanto, no-*P*. ¿Qué he de decir ahora: «*P*» o «no-*P*»? ¿Por qué no ambas? Si alguien me pregunta: «¿Qué es el caso, *P* o no-*P*?», contesto: *P* está al final de una demostración russelliana, por eso escribes en el sistema russelliano: *P*; pero, por otra parte, es demostrable, y esto se expresa mediante no-*P*, pero esa proposición no está al final de una demostración russelliana, no pertenece, por tanto, al sistema russelliano.—Cuando a *P* se le dio la interpretación «*P* es indemostrable» no se conocía esa demostración de *P* y no puede decirse, por tanto, que *P* dice: *esta* demostración no existe.—Si se ha construido la demostración, con ello se ha creado también una *nueva situación:* y ahora hemos de decidir si queremos llamar a *esto* una demostración (una demostración *más*) o si queremos llamar a *esto* todavía el enunciado de la indemostrabilidad.

Supongamos que no-*P* esté directamente demostrada; ¡está demostrado, entonces, que *P* puede demostrarse directamente! Se trata de nuevo, por tanto, de una cuestión de interpretación —a menos que tengamos ahora una demostración directa de *P*—. Si fuera así, bueno, sería así.

(La veneración y el miedo supersticioso de los matemáticos ante la contradicción.)

18. «¡Pero supongamos que la proposición fuera *falsa*, y por ello demostrable!»—¿Por qué la llamas 'falsa'? ¿Porque ves una demostración?— ¿O por otros motivos? Entonces no importa. Puede muy bien llamarse falso al principio de contradicción fundándose, por ejemplo, en que muy a menudo contestamos con buen sentido a una pregunta: «sí y no». Y lo mismo para la proposición: '$\sim \sim p = p$': porque usamos la doble negación como un *refuerzo* de la negación y no sólo como su supresión.

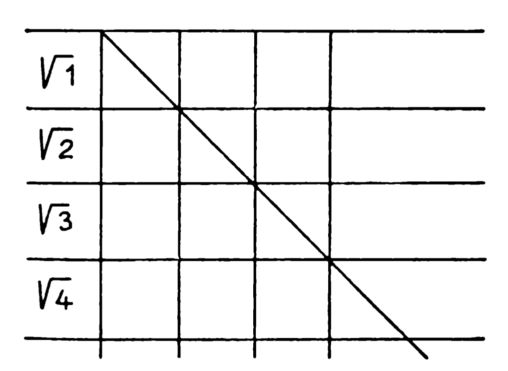
19. Dices: «... por lo tanto, *P* es verdadera e indemostrable». Esto quiere decir seguramente: «Por tanto, *P*». Por mí está bien, pero ¿con qué fin escribes esa 'afirmación'? (Es como si alguien, de ciertos principios sobre formas naturales y estilo arquitectónico, hubiera inferido que en la cima del monte Everest, donde nadie puede vivir, deberia haber un palacete de estilo barroco.) ¿Y cómo podrías hacerme plausible la verdad de la afirmación, ya que no puedes usarla para nada más que para esa monería?

20. Ha de recordarse aquí que las proposiciones de la lógica están construidas de modo que como *información* no tienen *ninguna* aplicación en la práctica. Por eso muy bien podría decirse que no son *proposiciones* en absoluto; y que necesita justificarse incluso el mero hecho de escribirlas. Y si a esas 'proposiciones' se les añade ahora una estructura para-proposicional de otro tipo, entonces es cuando está oscuro de verdad qué clase de aplicación, qué clase de sentido, ha de tener ahora ese sistema de combinaciones de signos, puesto que el mero *tono proposicional* de esas conexiones de signos no les proporciona ya un significado.

PARTE II

1938

1. ¿Hasta qué punto demuestra el método de la diagonal que hay un número que —digamos— no es una raíz cuadrada? Naturalmente, es extremadamente fácil mostrar que hay números que no son raíces cuadradas; pero, ¿cómo muestra eso *este* método?



Tenemos un concepto general de lo que significa mostrar que hay un número que no pertenece a ese conjunto infinito?

Supongamos que alguien ha recibido el encargo de citar un número que sea diferente de todo $\sqrt[2]{n}$; pero que no sabe nada del procedimiento de la diagonal y cita como solución el número $\sqrt[3]{2}$; y muestra cómo ese número no es ningún $\sqrt[2]{n}$. O que dice: toma $\sqrt{2} = 1.4142...$ y resta 1 del primer decimal; por lo demás, el resto ha de coincidir con $\sqrt{2}$. 1.3142... no puede ser un valor de $\sqrt{n}$.

2. «¡Dime un número que coincida con $\sqrt{2}$ en cada segundo decimal!» ¿Qué exige esta tarea?—La cuestión es: ¿se cumple con la respuesta: es el número que se consigue según esta regla: desarrolla $\sqrt{2}$ y suma 1 ó -1 a cada segundo decimal?

Es lo mismo que la tarea: divide un ángulo en tres partes, que puede considerarse cumplida colocando juntos 3 ángulos iguales.

3. Cuando a alguien, ante el requerimiento: «Muéstrame un número que sea diferente de todos éstos», se le da como respuesta la regla de la diagonal, ¿por qué no ha de decir: «¡No es esto a lo que yo me refería!»? Lo que me has dado es una regla para la construcción sucesiva de números sucesivamente diferentes de cada uno de éstos.

«Pero, ¿por qué no quieres llamar a esto también un método de calcular un número?»—Pero, ¿cuál es aquí el método de calcular y cuál el resultado? Dirás que son *una misma cosa*, ya que ahora tiene sentido decir: el número *D* es mayor que... y menor que...; puede elevársele al cuadrado, etc.

¿No es la pregunta propiamente ésta: para qué puede *necesitarse* este número? Sí, esto suena extraño.—Pero lo que quiere decir es: ¿en qué contexto matemático se encuentra?

4. Yo comparo, pues, métodos de cálculo, pero hay muy diferentes modos y maneras de comparar. Pero en algún sentido he de comparar los *resultados* de los métodos. Entonces todo se oscurece, puesto que en *un* sentido no tiene cada uno *un* resultado, o no está claro en principio lo que haya que considerar aquí en cada caso como *el* resultado. Diría que aquí se dan todas las oportunidades para dar la vuelta y torcer los significados.

5. Digamos no: «el método da un resultado», sino: «da una serie infinita de resultados». ¿Cómo comparo series infinitas de resultados? Bueno, hay muchas cosas diferentes que puedo llamar así.

6. ¡Mira *más allá* en torno a ti! De eso es de lo que se trata siempre en estos casos.

7. Hay que considerar con recelo el resultado de una operación de cálculo expresado verbalmente. La operación de *cálculo* esclarece el significado de la expresión verbal. Ella es el instrumento *más fino* para determinar el significado. Si quieres saber lo que significa la expresión verbal mira a la operación de cálculo; y no al revés. La expresión verbal sólo arroja una luz mate y general sobre la operación de cálculo: la operación de cálculo, sin embargo, una luz resplandeciente sobre la expresión verbal. (Como si quisieras comparar la altura de dos montes, no mediante una técnica de medición de alturas, sino mediante su aparente relación, a ese respecto, cuando se los mira desde abajo.)

8. «Quiero enseñarte un método con el que en un desarrollo puedes *eludir* sucesivamente todos esos desarrollos.» Un método así es el procedimiento de la diagonal.—«Pues produce una serie que es diferente de todos ellos.» ¿Es esto correcto?—Sí; si quieres aplicar esas palabras al caso arriba descrito.

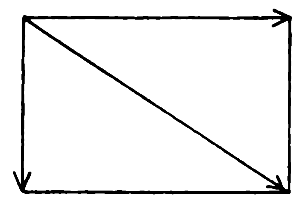
9. ¿Qué tal este método de construcción? El número de la diagonal se consigue por adición o substracción de 1, pero sólo se sabe si hay que añadir o substraer cuando se ha proseguido la serie original en varios lugares. ¿Qué tal si alguien dijera ahora?: el desarrollo de la serie diagonal nunca alcanza al desarrollo de las otras series; ciertamente, la serie diagonal elude a cada una de las series cuando las encuentra, pero esto no le sirve de nada, porque el desarrollo de las otras series va por delante de ella. Pero puedo decir en relación a esto: *siempre* hay una serie respecto a la

cual no está determinado si es o no diferente de la serie diagonal. Puede decirse: se siguen una a otra hasta el infinito, pero siempre la serie original delante.

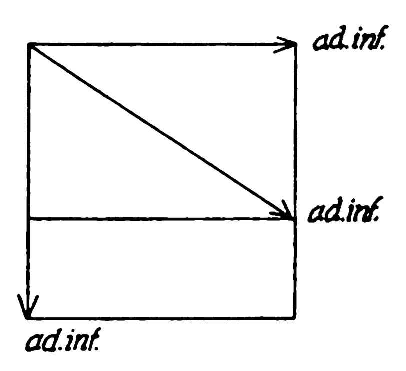
«¡Pero tu regla alcanza ya hasta el infinito; por tanto, sabes ya exactamente que la serie diagonal será distinta de cualquier otra!»

10. No significa nada decir: «*Así pues*, los números X no son enumerables». Podría decirse, por ejemplo: llamo innumerable al concepto numérico X cuando está establecido que, cualquiera que sea el número incluido en él que pongas en una serie, el número diagonal de esa serie también estará incluido en él.

11. Ya que mi dibujo sólo es la *indicación* de infinitud, por qué he de dibujar esto:



y no esto:



Tenemos aquí dibujos diferentes; y a ellos les corresponden diferentes modos de hablar. Pero ¿resulta algo útil de ahí cuando disputamos sobre *su* justificación? Lo importante ha de residir en otra parte; aunque sean estas imágenes las que más excitan nuestra *fantasía*.

12. ¿Para qué puede usarse el concepto 'no enumerable'?

13. Si alguien, un día si y otro también, intentara 'poner todos los números irracionales dentro de una serie', podríamos decirle: «¡Déjalo! no tiene sentido; ¿no lo ves? ¡Si hubieras construido una serie vendría yo, entonces, con la serie diagonal!» Esto podría hacerle abandonar su empresa. Pues bien, ello sería provechoso. Y me parece que ésta sería también la finalidad propia y plena de este método. Este utiliza el vago concepto de esa persona que, por así decirlo, trabaja en ello idiotamente, y consigue calmarla mediante una imagen. (Pero también podría inducírsela por otra imagen a continuar su empresa.)

14. El procedimiento exhibe algo, que de modo muy vago puede llamarse la demostración de que *esos* métodos de cálculo no pueden ordenarse en una serie. Y el significado de «*esos*» se toma aquí expresamente de modo vago.

15. ¡Una persona inteligente se ha dejado atrapar en esta red lingüística! Debe tratarse, por tanto, de una interesante red lingüística.

16. El fallo comienza al decir que los números cardinales pueden ordenarse en una serie. ¿Qué concepto, pues, se tiene de ese orden? Bueno, naturalmente, se tiene uno de una serie infinita, pero, cuando más, esto nos proporciona sólo una vaga idea, una guía para la formación de un concepto. El concepto mismo, en efecto, es *abstraído* de esta y de otras series diferentes; o la

expresión designa una cierta analogía de casos y puede usársela, por ejemplo, para delimitar provisionalmente un dominio del que quiere hablarse.

Pero con ello no se ha dicho que tenga un sentido claro esta pregunta: «¿Puede ordenarse el conjunto *R* en una serie?» Porque esa pregunta significa ahora, por ejemplo: ¿puede hacerse con estas formaciones algo que corresponda al ordenamiento de los números cardinales en una serie? Así pues, si se pregunta: «¿Pueden ordenarse en una serie los números reales?», la respuesta concienzuda podría ser: «Provisionalmente no puedo hacerme una idea exacta de ello».—«Pero puedes, por ejemplo, ordenar en una serie las raíces y los números algebraicos; ¡comprendes, por tanto, la expresión!»—Dicho más correctamente: *tengo* aquí ciertas formaciones análogas, a las que denomino con el nombre común de 'series'. Pero no tengo aún un puente seguro entre estos casos y el de 'todos los números reales'. Tampoco tengo un método general para intentar ver si tal y tal conjunto 'pueden ordenarse en una serie'.

Ahora se muestra aquí el procedimiento de la diagonal y se dice: «aquí tienes ahora la prueba de que ese modo de ordenar no vale aquí». Pero yo puedo contestar: «No sé —como se ha dicho— qué es lo que *no vale* aquí». Es verdad que veo, sin embargo: que quieres mostrar una diferencia en el uso de «raíz», «número algebraico», etc., por una parte, y «número real», por otra. Y sin duda, de este modo, por ejemplo: llamamos «números reales» a las raíces, y *también* al número de la diagonal formado a partir de las raíces. Y de modo semejante con todas las series de números reales. Por eso no tiene sentido alguno hablar de una «serie de *todos* los números reales», ya que también se llama un «número real» el número diagonal de la serie.—¿No sería esto semejante al caso en el que usualmente se llamara un libro a toda serie de libros y se dijera: «No tiene sentido hablar de 'la serie de todos los libros', ya que esa misma sería un libro»?

17. Resulta muy útil aquí imaginarse que el procedimiento de la diagonal para la producción de un número real hubiera sido conocido mucho antes de la invención de la teoría de conjuntos y familiar también entre los escolares, como muy bien hubiera

podido suceder. Así cambia de aspecto el descubrimiento de Cantor. Ese descubrimiento hubiera podido muy bien consistir *meramente* en una nueva concepción de ese cálculo elemental, muy conocido.

•

18. El tipo de cálculo mismo es ciertamente útil. El encargo sería, por ejemplo: escribe un número decimal que sea diferente de estos números:

0.1246798...
0.3469876...
0.0127649...
0.3426794...
...........(Imagínese una larga serie.)

El niño piensa para sí: ¿cómo he de hacer esto, tendría que mirar a la vez todos los números para evitar escribir uno de ellos? El método dice: en absoluto; cambia el primer lugar del primer número, el segundo del segundo, etc., y estarás seguro de haber escrito un número que no coincide con ninguno de los dados. El número que así se obtiene podría llamarse siempre el número de la diagonal.

19. Lo peligroso, equívoco, de la idea: «los números reales no pueden ordenarse en una serie», o incluso «el conjunto... no es enumerable», reside en que hace que lo que es una determinación conceptual, una formación conceptual, aparezca como un hecho natural.

20. Suena discreta esta proposición: «Si a algo se lo llama una serie de números reales, entonces el desarrollo del procedimiento diagonal se llama también un 'número real' y se dice de él que es diferente de todos los miembros de la serie».

21. Nuestro recelo debería estar siempre alerta cuando una demostración demuestra más de lo que le permiten sus medios. A algo así habría que llamarlo 'una demostración jactanciosa'.

22. La expresión usual simula un proceso, un método de ordenación, que, si bien es utilizable aquí, no conduce, sin embargo, a la meta a causa del número de objetos, que es mayor, incluso, que el de todos los números cardinales.

Si se dijera: «La reflexión sobre el procedimiento de la diagonal os muestra que el *concepto* 'número real' guarda mucha menos analogía con el concepto número cardinal de la que uno, seducido por ciertas analogías, podría creerse», ello tendría un sentido bueno y sincero. Pero sucede justamente lo *contrario*: por cuanto se pretende comparar en magnitud el 'conjunto' de los números reales con el de los números cardinales. La diferencia de género entre ambas concepciones se representa, por un modo de expresión equívoco, como diferencia de extensión. Creo y espero que una generación futura se reirá de este arte de birlibirloque.

23. La enfermedad de una época se cura mediante una transformación del modo de vida de las personas, y la enfermedad de los problemas filosóficos sólo podría curarse mediante un modo de vida y pensar transformados, no por una medicina que inventara algún particular.

Piensa que el uso del coche produce y fomenta ciertas enfermedades y que la humanidad será acosada por esta enfermedad hasta que, por una causa u otra, como resultado de algún adelanto, abandone otra vez el hábito de conducir.

24. Porque, ¿cómo se utiliza la proposición: «No existe el mayor número cardinal»? ¿Cuándo y en qué ocasión se diría? Ese uso es, en todo caso, completamente diferente del de la proposición matemática '$25 \times 25 = 625$'.

25. Ante todo hay que considerar, siquiera, que nos cuestionamos esto, lo cual indica que la respuesta no es evidente.

Además, si se intenta contestar con rapidez la pregunta, es fácil dar un traspié. Sucede aquí como con la cuestión de cuál es la experiencia que nos muestra que nuestro espacio es tridimensional.

26. Decimos de una *licencia* que no tiene fin.

27. Y puede decirse que la licencia para jugar juegos de lenguaje con números cardinales no tiene fin. Esto se diría, por ejemplo, a alguien a quien enseñáramos nuestro lenguaje y juegos de lenguaje. Se trataría de nuevo, por tanto, de una proposición gramatical, pero de un género *totalmente* diferente del de '25 × 25 = 625'. Tendría gran importancia, sin embargo, en caso de que el alumno, por ejemplo, se inclinara (quizá porque hubiera sido educado en una cultura totalmente diferente) a esperar un final definitivo de esa serie de juegos de lenguaje.

28. ¿Por qué hemos de decir: los números irracionales no pueden ser ordenados? Contamos con un método para distorsionar cualquier orden.

29. El método de la diagonal de Cantor no nos muestra un número irracional que sea diferente de todos en el sistema, pero da un sentido a la proposición matemática que dice que tal y tal número es diferente de todos los del sistema. Cantor podría decir: puedes demostrar que un número es diferente de todos los del sistema demostrando que en el primer lugar es diferente del primer número, en el segundo lugar del segundo número, etc.

Cantor dice algo sobre la multiplicidad del concepto 'número real diferente de todos los de un sistema'.

30. Cuando tenemos un sistema de extensiones Cantor demuestra que tiene sentido hablar de una extensión que sea diferente de todas ellas.—Pero con ello no queda aún determinada la gramática de la palabra «extensión».

31. Cantor da un sentido a la expresión «extensión que es diferente de todas las extensiones de un sistema» proponiendo que una extensión ha de llamarse así cuando puede demostrarse

de ella que es diferente diagonalmente de las extensiones de un sistema.

32. Existe, por tanto, una *tarea:* halla un número cuyo desarrollo sea diagonalmente diferente de los de este sistema.

33. Podría decirse: además de puntos racionales, en la línea de números hay *diversos sistemas* de puntos irracionales.

No hay ningún sistema de números irracionales, pero tampoco un super-sistema, un 'conjunto de números irracionales' de una infinitud de orden superior.

34. Cantor define una *diferencia de orden superior*, esto es, una diferencia de un desarrollo de un *sistema* de desarrollos. Puede usarse esta definición para mostrar que un número es diferente en este sentido de un sistema de números: por ejemplo, π, del sistema de los números algebraicos. Pero no podemos decir correctamente, respecto de la regla para alterar de tal y tal modo los lugares en la diagonal, que se demuestre de ella que es diferente de las reglas del sistema por ser ella misma de 'orden superior'; ya que ella *trata* de la alteración de un sistema de reglas y por ello no está claro, en principio, en qué caso queremos declarar que el desarrollo de *una* regla *tal* es diferente de todos los desarrollos del sistema.

35. '*Estas consideraciones pueden llevarnos a decir* que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.'

O sea: podemos *dejar* que las consideraciones nos lleven ahí.

O bien: podemos decir *eso* y dar *eso* como razón de ello.

Pero si lo decimos, ¿qué hemos de seguir haciendo con ello? ¿En qué praxis está *anclada* esa proposición? Provisionalmente se trata de una pieza de arquitectura matemática que pende en el aire, que parece, digamos, un arquitrabe, pero que ni es soportada por nada ni soporta nada.

36. Ciertas consideraciones pueden llevarnos a decir que 10^{10} almas caben en un cm^3. Pero, ¿por qué no lo decimos, a pesar de todo? Porque no tiene uso alguno. Porque, si bien es verdad que evoca una figura, se trata de una con la cual no podemos hacer nada.

37. La proposición vale tanto como valen sus fundamentos. Soporta tanto como soportan los fundamentos que la sostienen.

38. Una cuestión interesante es: ¿Qué conexión tiene $\aleph_0$ con los números cardinales, cuyo número se supone que es? Obviamente $\aleph_0$ seria el *predicado* '*serie infinita*' en su aplicación a la serie de los números cardinales y a formaciones matemáticas similares. Aquí es importante captar la relación entre una serie en sentido no matemático y una en sentido matemático. Es claro, naturalmente, que en la matemática *no* usamos la palabra «serie de números» en el sentido de «serie de signos numéricos», aunque, naturalmente, existe una conexión entre el uso de una expresión y el de la otra. Una vía férrea no es un tren de vía férrea; tampoco es algo parecido a un tren de vía férrea. 'Serie' en sentido matemático es un tipo de construcción para series de expresiones lingüísticas.

Tenemos, por tanto, una clase gramatical «secuencia infinita» y, equivalente a esa expresión, una palabra cuya gramática guarda (cierta) semejanza con la de un numeral: «Infinito» o «$\aleph_0$». Esto tiene que ver con que entre los cálculos de la matemática tengamos una técnica a la que, con cierto derecho, podemos llamar «correlación 1-1 de los miembros de dos secuencias infinitas», ya que se asemeja a una correlación mutua tal, de los miembros de las clases llamadas 'finitas'.

Pero del hecho de que tengamos aplicación para un tipo de numerales que, por así decirlo, indica el número de los miembros de una serie infinita, no se sigue que tenga también algún sentido hablar del número del concepto 'secuencia infinita', ni que *aquí* tengamos alguna aplicación para algo semejante a un numeral. No hay técnica gramatical alguna que sugiera la aplicación de

una expresión así. Porque es verdad que puedo formar la expresión: «Clase de todas las clases del mismo número que la clase 'secuencia infinita'», como también ésta: «Clase de todos los ángeles que caben en la punta de una aguja», pero esa expresión es vacía mientras no haya una aplicación para ella. Una aplicación así no hay que: descubrirla aún, sino: *inventarla* primero.

39. Imagina que colocara ante ti un tablero de juego dividido en cuadrados, que pusiera encima piezas semejantes a las figuras del ajedrez, dijera: «Esa figura es el '*rey*', éstas son los '*caballos*', éstas los '*peones*'. – No sabemos nada más del juego aún; pero, al fin y al cabo, eso ya es algo.—Y quizá se descubran más cosas aún.»

40. «No pueden ordenarse las fracciones según su magnitud.» Esto suena ante todo extremadamente interesante y curioso.

Suena interesante en sentido totalmente diferente, por ejemplo, a una proposición del cálculo diferencial. La diferencia reside, según creo, en que una proposición así se asocia fácilmente con una aplicación a lo físico, mientras que *esa* proposición parece pertenecer única y exclusivamente a la matemática y referirse, por así decirlo, a la historia natural de los objetos matemáticos mismos.

Se diría de ella, por ejemplo: que nos conduce a los secretos del mundo matemático. Es *éste* el aspecto frente al que quiero prevenir.

41. Cuando parece que..., entonces hay que tener cuidado.

42. Cuando ante la proposición: las fracciones no pueden ser ordenadas en una serie según su magnitud, me hago la imagen de una serie infinita de cosas, y entre cada cosa y su vecina se hacen visibles nuevas cosas, y otra vez nuevas cosas entre cada cosa y su vecina, y así sucesivamente, sin fin, ciertamente estamos ante algo ante lo que uno puede marearse.

Pero si vemos que esa imagen, aunque muy excitante, no resulta apropiada, que no podemos dejarnos atrapar por las palabras «serie», «ordenar», «existir» y otras, entonces volveremos a acudir a la *técnica* del cálculo con fracciones, en la que ahora ya no hay nada *extraño*.

43. Nada hay extraño en que en una técnica de cálculo de fracciones no tenga ningún sentido la expresión «la fracción mayor siguiente», en que no le hayamos dado ningún sentido.

44. Si aplicamos una técnica de interpolación continua de fracciones no queremos llamar a ninguna fracción la «mayor siguiente».

45. Decir de una técnica que es ilimitada *no* significa que siga actuando sin parar, que *crezca* inconmensurablemente, sino que le falta la institución de un final, que no está cerrada. Al igual que puede decirse de una proposición que no está acabada, cuando falta el punto final. O de un campo de juego, que no está delimitado, cuando las reglas de juego no prescriben ningún límite, mediante una línea, por ejemplo.

46. Una nueva técnica de cálculo ha de proporcionarnos una *nueva* imagen, una *nueva forma de expresión;* y no podemos hacer nada más absurdo que querer describir ese nuevo esquema, ese nuevo tipo de armazón, mediante las viejas expresiones.

47. ¿Cuál es la función de una proposición como: «Respecto a una fracción no hay otra fracción mayor siguiente, pero con respecto a un número cardinal sí hay uno mayor siguiente»? Bueno, es como si se tratara de una proposición que compara dos juegos. (Como: en el juego de damas existe el saltar por encima de una ficha, pero no en el ajedrez.)

48. Llamamos a algo «construir el número cardinal mayor siguiente», pero a nada «construir la fracción mayor siguiente».

49. ¿Cómo se comparan juegos? Describiéndolos: describiendo uno como variación del otro; describiéndolos y *poniendo de relieve* las diferencias y analogías.

50. «En el juego de damas no hay rey» —¿qué dice esto? (Suena pueril.) ¿Quiere decir sólo que a ninguna ficha de las damas se le llama «rey»? Y si se le llamara así a una, ¿habría entonces un rey en el juego de damas? Pero ¿qué sucede con *la* proposición: «En el juego de damas todas las fichas son equivalentes, pero no en el ajedrez»? ¿A quién comunico esto? A aquel que ya conoce ambos juegos o a uno que no los conoce aún. Parece que el primero no necesita nuestra comunicación y que el segundo no puede emprender nada con ella. Pero ¿y si yo dijera: «¡Mira! en el juego de damas todas las fichas son equivalentes, ...» o, mejor aún: «¡Mira!, en estos juegos todas las fichas son equivalentes, en aquéllos no»? Pero ¿qué hace una proposición así? Introduce un nuevo *concepto*, un nuevo fundamento de clasificación. Te enseño a responder a la cuestión: «¡Nómbrame juegos del primer tipo!», etc. Pero de modo similar podrían proponerse cuestiones como: «Inventa un juego en el que haya un rey».

51. 'No podemos ordenar las fracciones en una serie según su magnitud, pero *podemos* ordenarlas en una serie infinita.'

¿Qué ha aprendido aquel que no sabía esto? Ha aprendido un nuevo tipo de cálculo, por ejemplo: «Determina el número de la fracción...».

52. El aprende esa técnica, pero ¿no aprende también que existe una técnica así?

En efecto, en un sentido importante he aprendido que existe una técnica así; esto es, he conocido una técnica que puede aplicarse ahora a cualquier otro tipo de cosas.

53. '¿Cómo llamarías a *esto* ahora?'

	1	2	3	4	· · ·
1	1	3	6	10	·
2	2	5	9	·	
3	4	8	·		
4	7	·			
·	·				

¿No «un método de enumerar sucesivamente los pares de números»? y ¿no podría decir yo también: «de ordenar en una serie los pares de números»?

54. ¿Me enseña la matemática que puedo ordenar los pares de números en una serie? ¿Puedo decir, pues, que ella me enseña que puedo hacer *eso*? ¿Tiene sentido decir que enseño a un niño que se puede multiplicar cuando le enseño a multiplicar? Más bien podría decirse, naturalmente, que le enseño que se pueden multiplicar fracciones después de que él ha aprendido a multiplicar números cardinales entre sí. Puesto que entonces, podría decirse, ya sabe lo que significa «multiplicar». Pero ¿no sería engañoso también esto?

55. Cuando alguien dice que he demostrado la proposición de que pueden ordenarse en una serie pares de números, hay que contestar que esto no es ninguna proposición matemática, puesto que no se calcula con las palabras «se», «puede», «los», «pares de números», etc. La proposición «se puede...» es más bien sólo una descripción ocasional de la técnica que se aprende, un *título* no inapropiado, digamos, un encabezamiento para este capítulo. Pero un título con el cual no se puede *calcular* por el momento.

56. Pero, dices, eso es precisamente lo que hace el cálculo lógico de Frege y Russell: en él cada palabra que se pronuncia en matemática tiene un significado exacto, es un elemento del cálculó. En ese cálculo, pues, puede demostrarse realmente: «se puede multiplicar». Bien, ahora esa proposición es una proposición matemática; pero ¿quién dice que con ella pueda emprenderse algo? ¿Quién dice *para qué* puede ser de utilidad? Ya que no basta que suene interesante.

Porque en la enseñanza utilicemos, quizá, la proposición: «Ya ves que las fracciones pueden ordenarse en una serie», eso no significa que tengamos para esa proposición otro uso que el de asociar a ese tipo de cálculo una imagen fácil de recordar.

Si aquí el interés cae sobre la proposición que fue demostrada recae, entonces, sobre una imagen que tiene una justificación extremadamente débil, pero que nos incentiva por su rareza, como, por ejemplo, la figura de la 'dirección' del paso del tiempo. Produce un ligero bamboleo de los pensamientos.

57. Sólo puedo decir aquí: aparta tan pronto como puedas esa imagen, y cifra el interés del cálculo en su aplicación. (Es como si estuviéramos en un baile de disfraces en el que cada cálculo aparece en rara vestimenta.)

58. «¿Hay que evitar la palabra 'infinito' en matemáticas?» Sí; allí donde parece conferir un significado al cálculo; en lugar de recibirlo de él primero.

59. La expresión: «Pero cuando se mira al cálculo no hay nada infinito en él» —naturalmente una forma de hablar desacertada—, pero significa: ¿Es realmente necesario evocar aquí la imagen del infinito (de una magnitud enorme)? ¿Y cómo está conectada esa imagen con el *cálculo*? Porque su conexión no es la de la imagen | | | | con 4.

60. Es realmente cómico comportarse como si se estuviera decepcionado por no haber encontrado nada infinito en el

cálculo; pero no el preguntar: ¿cuál es el uso cotidiano de la palabra «infinito», que le proporciona su significado para nosotros, y cuál es ahora su conexión con esos cálculos matemáticos?

61. Finitismo y behaviorismo son corrientes del todo semejantes. Ambas dicen: pero aquí sólo hay... Ambas niegan la existencia de algo, ambas con el fin de escapar de una confusión.

62. Lo que hago no es demostrar que ciertos cálculos son falsos; sino someter a examen el *interés* de ciertos cálculos. Examino, por ejemplo, la justificación de usar aquí aún la palabra... Pero propiamente: vuelvo siempre a reclamar una investigación así. No puedo decir, por tanto: «Así no puede uno expresarse», o «Eso es absurdo», o «Eso carece de interés», sino: «Comprueba así la justificación de esa expresión». No puede uno hacerse una idea completa de la justificación de una expresión, *mientras* no se la haga de *su uso;* es decir, considerando sólo una faceta de su uso; una imagen, por ejemplo, asociada a ella.

PARTE III
1939-1940

1. 'Una demostración matemática ha de ser clara.' Llamamos «demostración» sólo a una estructura cuya reproducción sea una tarea fácil. Tiene que poder decidirse con seguridad si nos encontramos realmente dos veces con la misma demostración o no. La demostración ha de ser una imagen que pueda reproducirse exactamente con seguridad. O también: lo esencial a la demostración ha de poder reproducirse exactamente con seguridad. La demostración, por ejemplo, puede escribirse con dos tipos de letra o dos colores diferentes. A la reproducción de una demostración no ha de pertenecer lo que pertenece al género de reproducción exacta de un tono de color o de un tipo de letra.

Ha de ser fácil volver a escribir *exactamente* esa demostración. Aquí está la ventaja de la demostración escrita frente a la dibujada. Lo esencial de ésta es a menudo malentendido. El dibujo de una demostración euclídea puede ser inexacto en el sentido de que las rectas no sean rectas, los arcos de círculo no exactamente circulares, etc., y sin embargo, el dibujo sea una demostración exacta; ahí se ve que ese dibujo no demuestra, por ejemplo, que de una construcción así resulte un polígono de cinco lados iguales; y se ve igualmente que lo que demuestra es una

proposición de la geometría y no una sobre las propiedades del papel. compás. regla y lápiz.

En conexión con: la demostración, una *imagen* del experimento.

2. Quiero decir: cuando, mediante un cambio en la notación, se clarifica una figura demostrativa no clara, entonces se consigue de verdad una demostración donde antes no había ninguna.

Imaginemos ahora una demostración de una proposición russelliana sobre la adición, del tipo '$a+b=c$', que se compusiera de unos cuantos miles de signos. Dirás: ver si esa demostración es o no correcta es una dificultad puramente externa que no tiene interés matemático alguno. («Lo que uno ve claro fácilmente. otro lo ve con dificultad o no lo ve en absoluto», etc.)

Se supone que las definiciones sólo sirven para abreviar la expresión, para comodidad de quien calcula; mientras que son, sin embargo. una parte del cálculo. Con su ayuda se producen expresiones que sin ella no podrían producirse.

3. Qué sucede con esto: «Es verdad que en el cálculo de Russell no se puede multiplicar —en sentido usual— 234 por 537, pero existe una operación russelliana que corresponde a esa multiplicación».—¿De qué tipo es esa correspondencia? Las cosas podrían ser así: también en el cálculo russelliano puede llevarse a cabo esa multiplicación, sólo que en otro simbolismo; como también diríamos: podríamos llevarla a cabo también en otro sistema numérico. Entonces podríamos, por ejemplo. solucionar los problemas prácticos para cuya solución se usa aquella multiplicación, haciéndolo ahora mediante la operación del cálculo russelliano, sólo que resultaría más engorroso.

Imaginemos ahora los números cardinales explicados así: 1, $1+1$, $(1+1)+1$, $((1+1)+1)+1$, y así sucesivamente. Dices que las definiciones que introducen las cifras del sistema decimal valen sólo por su comodidad; también podría realizarse en esa larga notación la operación 703000×40000101. Pero ¿es verdad

eso?—«¡Naturalmente que sí! Puedo construir, escribir, en aquella notación una operación que corresponda a la operación en la notación decimal.»—Pero, ¿cómo sé que una corresponde a la otra?—Bueno, porque he derivado una de otra según un método determinado.—Pero si después de media hora vuelvo a mirar a la primera, ¿no puede haberse alterado? No se la puede abarcar de un golpe de vista.

Pregunto ahora: ¿podríamos convencernos también de la verdad de la proposición 7034174 + 6594321 = 13628495 mediante una demostración que se llevara a cabo en la primera notación?—¿Hay una demostración así de esa proposición?—La respuesta es: no.

4. Pero ¿no nos enseña Russell *un* tipo de adición?

Suponiendo que demostráramos por el método de Russell que $(\exists\ a...g)\ (\exists\ a...l) \supset (\exists\ a...s)$ es una tautología, ¿podríamos expresar el resultado así: $g + l$ es s? Esto supone que puedo tomar las tres letras del alfabeto como representantes de la demostración. Pero ¿muestra esto la prueba de Russell? Obviamente yo podría haber desarrollado la prueba de Russell con otros grupos de signos en los paréntesis, cuya secuencia no tuviera nada característico para mí, de modo que no hubiera sido posible representar el grupo de signos de un paréntesis mediante su último término.

Supuesto incluso que la prueba de Russell se llevara a cabo, como en la notación decimal, en una notación del tipo $x_1 x_2 ... x_{10} x_{11} ... x_{100} ...$, y que en el primer paréntesis hubiera 100 miembros, 300 miembros en el segundo y 400 en el tercero, ¿mostraría la prueba, incluso entonces, que 100 + 300 = 400?—¿Y si esa prueba condujera una vez a tal resultado y otra vez a tal otro, por ejemplo a 100 + 300 = 420? ¿Qué se necesita para ver que el resultado de la prueba, si ha sido deducido correctamente, sólo depende siempre de las últimas cifras de los dos primeros paréntesis?

Pero Russell sí nos enseña a sumar números pequeños; puesto que entonces abarcamos de una ojeada los grupos de signos entre paréntesis y podemos considerar*los* como numerales; por ejemplo, '*xy*', '*xyz*', '*xyzuv*'.

Así pues, Russell nos enseña otro cálculo diferente para llegar a 5 a partir de 2 y 3; y esto es verdad también cuando decimos que el cálculo lógico no es más que flecos que cuelgan del cálculo aritmético.

La *aplicación* del cálculo ha de cuidarse de sí misma. Y esto es lo correcto del 'formalismo'.

La reducción de la aritmética a lógica simbólica ha de mostrar la aplicación de la aritmética, el punto de incidencia, por así decirlo, en el que hace al caso su aplicación. Como si alguien mostrara a uno primero una trompeta sin la boquilla, y luego la boquilla, que nos enseña cómo se usa una trompeta, cómo se pone en contacto con el cuerpo humano. Pero el punto de incidencia que nos ofrece Russell es, por una parte, demasiado estrecho y, por otra, demasiado ancho, demasiado general y demasiado especial. El cálculo se cuida de su propia aplicación.

Extendemos nuestras ideas de operaciones con números pequeños a operaciones con números grandes, de modo parecido a como imaginamos que si la distancia de aquí hasta el sol *pudiera* ser medida con un metro resultaría la misma que la que hoy obtenemos de modo completamente diferente. Es decir, nos inclinamos a tomar la medida de longitudes mediante un metro como modelo también para la medición de la distancia entre dos estrellas.

Se dice, por ejemplo en la escuela: «Si imaginamos reglas de metro colocadas desde aquí hasta el sol...», y con ello parece que se explica lo que entendemos por distancia entre sol y tierra. Y el uso de una imagen así es perfectamente válido mientras tengamos claro que podemos medir la distancia de nosotros al sol y que no podemos medirla con reglas de un metro.

5. ¿Y si alguien dijera: «La auténtica prueba de que 1000 + 1000 = 2000 es, después de todo, la de Russell, que muestra que la expresión... es una tautología»? ¿No puedo, entonces, demostrar que se produce una tautología cuando en los dos primeros paréntesis tengo 1000 miembros y en el tercero 2000? Y si puedo demostrarlo, entonces puedo considerar eso como demostración de la proposición aritmética.

Siempre es bueno en filosofía plantear una *cuestión* en lugar de dar una respuesta a una cuestión.

Pues una respuesta a una cuestión filosófica fácilmente puede resultar incorrecta; no así su liquidación mediante otra pregunta.

¿He de plantear, por tanto, aqui una *cuestión* en lugar de responder que con el método de Russell no puede probarse aquella proposición aritmética?

6. La prueba de que $\overset{1}{(\quad)}\ \overset{2}{(\quad)} \supset \overset{3}{(\quad)}$ es una tautología consiste en que siempre se tacha un miembro del tercer paréntesis para un miembro de (1) o de (2). Y hay muchos modos y maneras de hacer esta correlación. O también podría decirse: hay muchos modos y maneras de determinar el éxito de una correlación 1-1. Uno sería, por ejemplo, construir modelos en forma de estrella, uno para el lado izquierdo de la implicación y otro para el lado derecho, y volver a comparar la implicación componiendo un adorno con ambos modelos.

Así pues, podría darse la siguiente regla: «Si quieres saber si realmente los números A y B dan juntos C, escribe una expresión de la forma... y correlaciona las variables de los paréntesis, escribiendo (o intentando escribir) la demostración de que la expresión es una tautología.»

Mi objeción a ello *no* es ahora que sea arbitrario prescribir justamente ese tipo de correlación, sino que de ese modo no puede determinarse que 1000 + 1000 = 2000.

7. Imagina que hubieras escrito una 'fórmula' de una milla de longitud y que demostraras por transformación que es tautológica ('si entretanto *ella* no ha cambiado', habría que decir).

Ahora *contamos* los miembros de los paréntesis o los clasificamos, haciendo que la fórmula resulte abarcable, y se muestra que en el primer paréntesis hay 7566 miembros, 2434 en el segundo y 10000 en el tercero. ¿He mostrado con ello que 2434 + 7566 = 10000?—Esto depende —podría decirse— de si estás seguro de que el recuento ha proporcionado realmente el número de los miembros que estaban en los paréntesis durante la demostración.

¿Podría decirse: «Russell nos enseña a escribir en el tercer paréntesis tantas variables como hay en los dos primeros juntos»? Propiamente, sin embargo: nos enseña a escribir una variable en (3) para cada variable en (1) y en (2).

Pero ¿aprendemos con ello qué número es la suma de dos números dados? Quizá se diga: «Naturalmente, ya que en el tercer paréntesis aparece ahora el paradigma, el modelo del nuevo número». Pero, ¿hasta qué punto | | | | | | | | | | | | | | | | es el paradigma de un número? Considera cómo puede usárselo como tal.

8. Ante todo, la tautologia russelliana correspondiente a la proposición $a+b=c$ no nos muestra en qué notación hay que escribir el número c, y ello no es razón alguna para que no haya de escribirse en la forma $a+b$.—Pues Russell no nos enseña la técnica de la adición, en el sistema decimal por ejemplo.—Pero ¿podríamos deducirla quizá de su técnica?

Hagamos la siguiente pregunta: ¿Puede deducirse la técnica del sistema decimal de la del sistema 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, etc?

¿No podría también formularse así esta cuestión: cuando se tiene una técnica de cálculo en un sistema determinado y otra en otro sistema diferente, cómo mostrar que ambas son equivalentes?

9. «Una demostración no sólo ha de mostrar que ello es así, sino que ello ha de ser así.»

¿Bajo qué circunstancias muestra eso el contar?

Alguien diría: «Cuando las cifras y lo contado producen una imagen fácil de grabar. Cuando, a partir de entonces, se usa ya esa imagen en lugar de un nuevo recuento del conjunto.»—Pero parece que aquí hablamos sólo de imágenes *espaciales:* si sabemos de memoria, sin embargo, una serie de palabras y coordinamos miembro a miembro los de tales series, diciendo por ejemplo: «el primero, lunes; el segundo, martes; el tercero, miércoles, etc.», ¿no podemos *demostrar* así que de lunes a jueves son cuatro días?

La cuestión es: ¿A qué llamamos una «imagen fácil de grabar»? ¿Cuál es el criterio de que la hemos grabado en nosotros? ¿O la respuesta a ello es: «¡Que la empleamos como paradigma de la identidad!»?

10. No hacemos *experimentos* con una proposición o demostración para determinar sus propiedades.

¿Cómo reproducimos, copiamos, una demostración?—No, por ejemplo, tomando medidas de ella.

¿Y si una demostración fuera tan enormemente larga que no se la pudiera abarcar de una ojeada? O contemplamos otro caso: como paradigma del número que llamamos 1000 se ha grabado en una roca dura una larga hilera de rayas. A esa hilera la llamamos el protomillar y para saber si hay mil personas en una plaza trazamos rayas o tendemos hilos (correlación 1-1).

Aquí el signo numérico de 1000 no posee la identidad de una figura, sino la de un objeto físico. Igualmente podríamos imaginarnos un protocentenar, etc. y una demostración de que $10 \times 100 = 1000$, que no pudiéramos *abarcar de una ojeada.*

La cifra para 1000 en el sistema $1+1+1+1...$ no puede ser reconocida por su *figura.*

11. ||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||

¿Es esta figura una demostración de que $27+16=43$, porque se llega a '27' cuando se cuentan las rayas del lado izquierdo, a '16' en el lado derecho y a '43' cuando se cuenta toda la fila?

¿Dónde reside aquí lo extraño, si a la figura se la llama la demostración de esa proposición? Ciertamente en el modo de reproducir o reconocer esa demostración; en el hecho de que ésta no tenga configuración visual característica alguna.

Aunque esa demostración no tenga forma visual, puedo copiarla (reproducirla) exactamente sin embargo; ¿no es la figura, por tanto, una demostración? Podría, por ejemplo, grabarla en un trozo de acero y hacer que pasara de mano en mano. Entonces diría a alguien: «Aquí tienes la prueba de que 27+16=43.» ¿No puede decirse que demuestra la proposición con ayuda de una figura? Sí, pero la figura no es la demostración.

A esto, sin embargo, se le llamaría una demostración de que 250+3220=3470: alguien cuenta a partir de 250 y, al mismo tiempo, comienza a contar también desde 1 y hace corresponder los dos recuentos:

251 ... 1
252 ... 2
253 ... 3
etc.
3470 ... 3220

Podría llamarse a esto una demostración en 3220 pasos. Y es ciertamente una demostración, pero ¿puede hacérsela abarcable de una ojeada?

12. ¿Qué es propiamente la invención del sistema decimal? La invención de un sistema de abreviaturas; pero, ¿qué es un sistema de abreviaturas? ¿Es meramente un sistema de nuevos números o también un sistema de sus usos como abreviatura? Si es lo segundo, entonces es ciertamente un nuevo modo de ver el antiguo sistema de signos.

Partiendo del sistema 1+1+1..., ¿podemos aprender a calcular en el sistema decimal mediante simples abreviaturas en la notación?

13. Supongamos que, siguiendo a Russell, he demostrado una proposición de la forma $(\exists\, xyz...)\ (\exists uvw...) \supset (\exists abc...)$, y que ahora «la hago abarcable de una ojeada» escribiendo sobre las variables signos así: x_1, x_2, x_3..., ¿he de decir por ello que he demostrado, siguiendo a Russell, una proposición aritmética en el sistema decimal?

Pero a toda demostración en el sistema decimal corresponde una en el sistema russelliano. ¿Cómo sabemos que eso es así? Dejemos de lado la intuición.—Pero puede demostrarse.

Cuando en el sistema decimal se define un número en términos de 1, 2, 3,... 9, 0, y los signos 0, 1,... 9 en términos de $1+1$, $(1+1)+1$, ..., ¿puede llegarse, entonces, a través de la explicación recursiva del sistema decimal, desde un número cualquiera hasta un signo de la forma $1+1+1$...?

¿Y si alguien dijera: la aritmética russelliana coincide con la usual hasta números bajo 10^{10}; pero a partir de ahí diverge de ella? Y luego nos presentara una demostración russelliana por la que $10^{10}+1=10^{10}$. ¿Por qué no he de fiarme de una prueba así? ¿Cómo me convencerá alguien de que he tenido que confundirme en la demostración russelliana?

¿Necesito entonces una demostración proveniente de otro sistema para convencerme de que me he confundido en la primera demostración? ¿No basta si escribo esa demostración de modo que resulte abarcable?

14. ¿No estriba toda mi dificultad en darme cuenta de cómo, sin salir del cálculo lógico de Russell, en la expresión '$(\exists\, xyz...)$', puede llegarse al concepto de *conjunto de variables* allí donde esa expresión no es abarcable?

Pero puede hacérsela ahora abarcable escribiendo: $(\exists\ x_1, x_2, x_3...)$. Y sin embargo, hay algo que no entiendo: se ha cambiado el criterio de identidad de una expresión así. Veo ahora de otro

modo que el conjunto de los signos de ambas expresiones es el mismo.

Me veo tentado a decir: la prueba de Russell, efectivamente, puede avanzar paso a paso, pero al final no se sabe bien lo que se ha demostrado, al menos no desde los viejos criterios. Al hacer abarcable la demostración de Russell, demuestro algo sobre esa demostración.

Quiero decir: no se necesita en absoluto aceptar la técnica de cálculo de Russell, y con otra técnica de cálculo puede demostrarse que *ha* de haber una demostración russelliana de la proposición. Pero entonces, efectivamente, la proposición no descansa ya sobre la demostración de Russell.

O bien: que pueda imaginarse una demostración russelliana para toda proposición demostrada de la forma $m+n=l$, no muestra que la proposición descanse sobre esa demostración. Porque es pensable el caso de que no pueda distinguirse en absoluto la demostración R de una proposición de la demostración R de otra, y que se diga que son diferentes sólo porque son las traducciones de dos demostraciones manifiestamente diferentes.

O también: algo deja de ser una demostración cuando deja de ser un paradigma, por ejemplo el cálculo lógico de Russell; y, por otra parte, cualquier otro cálculo que nos sirva de paradigma resulta aceptable.

15. Es un hecho que diferentes métodos de contar coinciden prácticamente siempre.

Cuando cuento los cuadrados de un tablero de ajedrez, prácticamente siempre llego a '64'.

Si sé de memoria dos series de palabras, por ejemplo los numerales y el alfabeto, y los ordeno de modo que ambas se correspondan 1-1

a	1
b	2
c	3

etc.,

prácticamente siempre llego a '28'.

Hay algo así como: conocer de memoria una serie de palabras. ¿Cuándo se dice que sé de memoria el poema...? Los criterios son bastante complicados. Uno es la correspondencia con el texto impreso. ¿Qué habría de suceder que me hiciera dudar de que realmente sé de memoria el *ABC*? Es difícil imaginárselo.

Pero yo uso ahora la recitación o la escritura de memoria de una secuencia de palabras como criterio de igualdad de números, igualdad de conjuntos.

¿He de decir ahora: todo esto no importa; la lógica sigue siendo el cálculo fundamental, sólo que, efectivamente, en cada caso se determina de modo diferente si tengo ante mí dos veces la misma fórmula?

16. No es la lógica la que me compele —diría yo— a aceptar una proposición de la forma $(\exists \quad) (\exists \quad) \supset (\exists \quad)$, cuando dentro de cada uno de los dos primeros paréntesis hay un millón, y dos millones en el tercero. Quiero decir: no es en absoluto la lógica la que me compele en ese caso a aceptar proposición alguna. Algo *diferente* me compele a aceptar una proposición así como acorde con la lógica.

La lógica sólo me compele en la medida en la que me compele el cálculo lógico.

¡Pero es esencial al cálculo con 1000000 que este número haya de poder resolverse en una suma $1 + 1 + 1$...! Y para estar seguros de que tenemos ante nosotros el número correcto de unos, podemos numerarlos:

$$\begin{matrix} 1 + & 1 + & 1 + & 1 \ldots & + 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1000000. \end{matrix}$$

Esta notación sería semejante a esta otra: '100,000.000,000', que también hace que el numeral sea abarcable de una ojeada. Y puedo imaginarme perfectamente que alguien hubiera registrado en céntimos grandes sumas de dinero en un libro, donde aparecieran, por ejemplo, números de 100 cifras, con los que yo hubiera de calcular ahora. Comenzaría a traducirlos a una notación abarcable, pero los llamaría ciertamente 'numerales', los trataría como documentos de números. Sí, consideraría como documento de un número incluso el que alguien me dijera que N tiene tantos chelines como guisantes caben en esta barrica. De otro modo también: «Tiene tantos chelines como letras tiene el *Cantar de los Cantares*».

17. La notación 'x_1, x_2, x_3, ...' da una configuración a la expresión '($\exists$...)' y, con ello, a la tautología demostrada russellianamente.

Deja que pregunte: ¿Es inconcebible que en la prueba de Russell la correlación 1-1 no pueda llevarse a cabo fiablemente, que, cuando queremos usarla para sumar, por ejemplo, dé normalmente un resultado contradictorio con los usuales, y que achaquemos esto al cansancio que, sin que lo notemos, nos hace saltar ciertos pasos? ¿Y no podríamos decir entonces: si no nos fatigáramos se produciría el mismo resultado? ¿Porque lo exige la lógica? ¿Lo exige efectivamente? ¿No enmendamos aquí la lógica con otro cálculo diferente?

Supongamos que tomamos siempre de una vez 100 pasos juntos del cálculo lógico, consiguiendo así resultados fiables, mientras que no los conseguimos si intentamos seguir cada uno de los pasos por separado, diríamos: el cálculo sigue basándose en pasos de unidades, ya que un paso de cien se define por un paso de uno.—Pero la definición dice: dar un paso de cien es lo mismo que... y, sin embargo, damos un paso de cien y *no* cien de uno.

En el cálculo abreviado sigo también una *regla*, y ¿cómo se justifica esa regla? ¿Y si la demostración abreviada y la no abreviada dan resultados diferentes?

18. Lo que digo viene a ser: que, por ejemplo, puedo definir '10' como '1 + 1 + 1 + 1 ...' y '100 × 2' como '2 + 2 + 2 ...', pero no por ello necesariamente '100 × 10' como '10 + 10 + 10 ...' ni tampoco como '1 + 1 + 1 + ...'.

Por un procedimiento 'abreviado' puedo asegurarme de que 100 × 100 = 10000. ¿Por qué, entonces, no he de considerar *ése* como el procedimiento demostrativo originario?

Un procedimiento abreviado me enseña lo que *ha* de salir del no abreviado. (Y no al contrario.)

19. «El cálculo se basa, efectivamente, en los pasos de unidades...» Sí, pero de otro modo. El procedimiento demostrativo es, justamente, otro.

Podría decir, por ejemplo: 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 y, *de modo parecido*, 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. ¿No he basado la explicación de 100 en la adición sucesiva de 1? Pero, ¿del mismo modo que si hubiera sumado 100 unidades? ¿Se necesita siquiera en mi notación un signo de la forma '1 + 1 + 1...' con 100 sumandos?

Parece que el peligro aquí es considerar el procedimiento abreviado como una sombra pálida del no abreviado. La regla del contar no es el contar.

20. ¿En qué consiste 'reunir' 100 pasos del cálculo? En considerar decisivo no los pasos de unidades, sino otro paso diferente.

Ordinariamente, al sumar números enteros en el sistema decimal damos pasos de unidades, pasos de decenas, etc. ¿Puede decirse que el procedimiento se basa en dar sólo pasos de unidades? Y esto podría justificarse así: el resultado de la adición aparece efectivamente así, '7583', pero la explicación de ese signo, su significado, que en último término ha de encontrar también expresión en su uso, es de este tipo: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, etc. Pero ¿es así? ¿Ha de explicarse así el signo numérico o ha de expresarse implícitamente en su uso esa explicación? Creo que si recapacitamos se muestra que éste no es el caso.

Calcular con gráficos o con el ábaco.
Efectivamente, si controlamos un tipo de cálculo con el otro, conseguimos normalmente el mismo resultado. Pero si hay varios tipos y no coinciden, ¿quién dice cuál es el modo original de calcular, asentado en la fuente de la matemática?

21. Donde puede aparecer una duda sobre si *ésta* es realmente la imagen de *esta* demostración, donde estamos dispuestos a dudar de la identidad de una demostración, allí la deducción ha perdido su fuerza probatoria. Puesto que la demostración nos sirve como baremo.

¿Podría decirse: a una demostración pertenece un criterio, aceptado por nosotros, de reproducción correcta de la demostración?

Esto quiere decir, por ejemplo: hemos de poder estar seguros, tiene que ser algo seguro para nosotros, que al demostrar no hemos pasado por alto ningún signo. Que no puede habernos engañado ningún diablillo, haciendo que desaparezcan, o añadiendo, etc., signos sin nosotros saberlo.

Alguien podría expresarse así: cuando puede decirse: «aunque

un demonio nos hubiera engañado, todo estaría bien», entonces la mala partida que éste pretendía jugarnos ha errado su objetivo.

22. Podría decirse que la demostración no muestra sólo *que* eso es así, sino: *cómo* eso es así. Muestra cómo 13 + 14 dan 27.

«La demostración tiene que ser abarcable de una ojeada» significa: hemos de estar dispuestos a usarla como pauta de nuestro juicio.

Cuando digo que «la demostración es una imagen», puede uno representársela como una imagen cinematográfica.

La demostración se hace de una vez por todas.
Naturalmente, la demostración ha de ser modélica.

La demostración (la imagen de la demostración) nos muestra el resultado de un procedimiento (de construcción); y estamos convencidos de que un proceder *así* regulado siempre conduce a esa imagen.
(La demostración nos presenta un hecho sintético.)

23. Con la proposición que expresa que la demostración es un modelo, no podemos, naturalmente, decir nada nuevo.

La demostración ha de ser un procedimiento del que yo diga: Sí, así ha de ser; eso ha de resultar si procedo de acuerdo con esa regla.

Podría decirse que la demostración, originariamente, ha de ser una especie de experimento, pero que se la toma después simplemente como una imagen.

No es ninguna prueba de que 200 + 200 = 400 el que yo ponga en alguna parte 200 manzanas y 200 manzanas y, al contarlas, salgan 400. Es decir, no usaríamos de buen grado ese hecho como paradigma para enjuiciar todas las situaciones semejantes.

Decir: «estas 200 manzanas y estas 200 manzanas dan 400», dice: si se las pone juntas en alguna parte, no desaparece ni se añade ninguna, se comportan *normalmente*.

24. «Este es el modelo de la adición de 200 y 200»; no: «este es el modelo de que sumados 200 y 200 dan 400». El procedimiento de adición *dio por resultado*, efectivamente, 400, pero este resultado lo tomamos ahora como criterio de la adición correcta, o simplemente: de la adición de esos números.

La demostración ha de ser nuestro modelo, nuestra imagen, de cómo esas operaciones tienen *un resultado*.

La 'proposición demostrada' expresa todo lo que puede colegirse de la imagen de la demostración.

La demostración es nuestro modelo de la suma correcta de 200 manzanas y 200 manzanas. Esto quiere decir que ella establece un nuevo concepto: 'la suma conjunta de 200 y 200 objetos'. O también podría decirse: «un nuevo criterio de que nada ha desaparecido ni se ha añadido».

La demostración *define* la 'suma conjunta correcta'.

La demostración es nuestro modelo de un determinado *resultar*, que sirve de objeto de comparación (patrón) para transformaciones reales.

25. La demostración nos convence de algo, pero no nos interesa la disposición de ánimo del estar convencido, sino los usos que admite esa convicción.

Por eso nos deja fríos este aserto: la demostración nos convence de la verdad de esta proposición, dado que esta expresión es capaz de las más diversas interpretaciones.

Cuando digo: «la demostración me convence de algo», la proposición que expresa esa convicción no ha de construirse en la demostración. Así, por ejemplo, multiplicamos, pero no escribimos necesariamente el resultado en forma de una proposición como '... × ... = ...'. Alguien dirá, por tanto: la multiplicación nos proporciona esa convicción sin que la *proposición* que la expresa se pronuncie nunca.

Una desventaja psicológica de las demostraciones que construyen *proposiciones* es que nos permiten olvidar fácilmente que el *sentido* del resultado no puede colegirse de éste solamente, sino de la *demostración.*

Los signos russellianos velan, por así decirlo, las formas importantes de la demostración hasta hacerlas irreconocibles, como cuando una figura humana está envuelta en varios paños.

26. Reparemos en que en la matemática son proposiciones *gramaticales* las que nos convencen; la expresión, el resultado, de ese convencimiento es, por tanto, que *aceptamos una regla.*

Lo más probable es que la expresión verbal del resultado de una demostración matemática tienda a simular ante nosotros un mito.

27. Yo diría algo así: aunque la proposición matemática demostrada parece referirse a una realidad exterior a sí misma, ello no es más que la expresión de la aceptación de un nuevo baremo (de la realidad).

Tomamos la constructibilidad (demostrabilidad) de ese símbolo (es decir, de la proposición matemática) como signo de que hemos de transformar símbolos de tal y tal manera.

¿Hemos obtenido en la demostración algún conocimiento? ¿Y la última proposición expresa ese conocimiento? ¿Es independiente ese conocimiento, ahora, de la demostración (se ha cortado el cordón umbilical)?—Bien, ahora la proposición se usa sola y sin el apéndice de la demostración.

¿Por qué no he de decir: en la demostración he conseguido llegar a una *decisión*?

La demostración coloca esa decisión en un sistema de decisiones.

(Naturalmente, también podría decir: «la demostración me convence de la utilidad de esa regla». Pero el decir esto podría fácilmente inducir a error.)

28. La proposición demostrada por la demostración sirve como regla, o sea, como paradigma. Pues nos *dirigimos* por la regla.

Pero ¿la demostración sólo nos induce a dirigirnos por esa regla (aceptarla) o nos muestra, además, *cómo* hemos de dirigirnos por ella?

Pues la proposición matemática ha de mostrarnos lo que tiene SENTIDO que se diga.

La demostración construye una proposición; pero lo que importa es precisamente *cómo* la construye. A veces, por ejemplo, construye primero un *número* y luego sigue la proposición que manifiesta que existe un número así. Cuando decimos que la construcción habría de *convencernos* de la proposición, ello quiere decir que tiene que inducirnos a usar esa proposición de tal y tal modo. Que tiene que determinarnos a aceptar como sentido tal cosa, y tal otra no.

29. ¿Qué tiene en común el propósito de una construcción euclídea, la bisección de la línea recta, por ejemplo, con el propósito de la derivación de una regla a partir de otras mediante inferencias lógicas?

Lo común parece ser que, mediante la construcción de un signo, fuerzo a la aceptación de un signo.

¿Podría decirse: «La matemática crea nuevas *expresiones*, no nuevas proposiciones»?

En la medida, ciertamente, en que las proposiciones matemáticas, de una vez por todas, son instrumentos admitidos en el lenguaje y su demostración muestra el lugar en que están.

Pero ¿en qué medida, por ejemplo, las tautologías de Russell son 'instrumentos del lenguaje'?

Russell, en todo caso, no las habría considerado tales. Su error, de haber alguno, sólo podría consistir, sin embargo, en no haber prestado atención al *uso*.

La demostración permite que una estructura surja de otra.

Nos muestra el surgimiento de una a partir de otra.

¡Todo eso está muy bien, pero con ello consigue, en diferentes casos, cosas completamente diferentes! ¿Cuál es el *interés* de esa transición?

Aunque imagine la demostración depositada en un archivo del lenguaje, ¿quién dice *cómo* ha de emplearse ese instrumento, para qué sirve?

30. La demostración me induce a decir: esto *tendría que* ser así.—Bien, esto lo entiendo en el caso de una demostración euclídea o de una demostración de que '$25 \times 25 = 625$', pero ¿es también así en el caso de una demostración russelliana, por ejemplo, como '$\vdash p \supset q \cdot p : \supset : q$'? ¿Qué significa aquí 'esto *tendría que* ser así', en contraposición a 'esto es así'? ¿He de decir: «Bien, acepto esta expresión como paradigma de todas las proposiciones de esta forma que no dicen nada»?

Recorro la demostración y digo: «Sí, así *tiene que* ser; *así* he de establecer el uso de mi lenguaje».

Diría que el *tener que* es como un raíl que coloco en el lenguaje.

31. Cuando dije que una demostración introduce un nuevo concepto me refería a algo así: la demostración añade un nuevo paradigma a los paradigmas del lenguaje; como si alguien, por ejemplo, que consigue una mezcla especial de azul rojizo, fijara de algún modo esa especial mezcla de colores y le diera un nombre.

Pero, aunque seamos propensos a llamar demostración a un nuevo paradigma así, ¿cuál es exactamente la similitud de una demostración con un modelo conceptual así?

Diríamos: la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Produce nuevas conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que estén ahí, sino que no están ahí mientras ella no las produzca.)

32. ¿Qué concepto crea '$p \supset p$'? Y, sin embargo, para mí es como si pudiera decirse que '$p \supset p$' nos sirve como signo conceptual.

'$p \supset p$' es una fórmula. ¿Establece una fórmula un concepto? Puede decirse: «según la fórmula... de ahí se sigue esto y esto». O también: «de ahí se sigue esto y esto de este modo...». Pero ¿es esto una proposición tal como yo la quiero? ¿Y qué decir respecto a esto: «saca las consecuencias de ahí de este modo...?

33. Si digo de la demostración que es un modelo (una imagen), he de poder decirlo también de un *Pp* russelliano (como célula de una demostración).

¿Puede preguntarse: cómo se ha llegado a proferir la proposición '$p \supset p$' como un aserto verdadero? Bien, no se la ha usado en la práctica del intercambio lingüístico y, sin embargo, uno se inclinaba a pronunciarla con *convicción* en ciertas circunstancias (cuando, por ejemplo, se ejercita la lógica).

Pero, ¿qué decir respecto a '$p \supset p$'? Veo en ella una proposición degenerada que está del lado de la verdad.

La establezco como punto importante de intersección de proposiciones con sentido. Un punto cardinal del modo de representación.

34. La construcción de la demostración comienza con unos signos cualesquiera, y algunos de ellos, las 'constantes', han de tener ya significado en el lenguaje. Así es esencial que '$\vee$' y '$\sim$' tengan un uso corriente para nosotros, y de ahí toma su importancia, su sentido, la construcción de una demostración en los *Principia Mathematica*. Los signos de la demostración, sin embargo, *no* permiten reconocer ese significado.

La 'aplicación' de la demostración, naturalmente, tiene que ver con esa aplicación de sus signos.

35. Como hemos dicho, en cierto sentido yo ya estoy convencido del *Pp* de Russell.

Así pues, la convicción que produce la demostración no puede provenir sólo de la construcción de la demostración.

36. Si yo viera en París el metro-patrón pero no conociera la institución de la medida ni su conexión con ese patrón, ¿podría decir que conozco el concepto de metro-patrón?

¿No es, pues, también la demostración una parte de una institución?

La demostración es un instrumento; pero, ¿por qué digo: «un instrumento del lenguaje»?

¿Es, pues, un cálculo necesariamente un instrumento del lenguaje?

37. Haga lo que haga, parece que hay que resaltar la diferencia entre determinación del sentido y aplicación del sentido.

38. Aceptar la demostración: puede aceptársela como paradigma de la figura que surge cuando *estas* reglas se aplican correctamente a determinadas figuras. Puede aceptársela como correcta derivación de una regla de inferencia. O como una correcta derivación de una correcta proposición empírica; o como correcta derivación de una proposición empírica de la que no sabemos si es verdadera o falsa.

Pero ¿no puedo decir, entonces, que la concepción de la demostración como 'prueba de constructibilidad' de la proposición demostrada es en algún sentido una concepción más simple, más primaria, que cualquier otra?

¿Puedo, pues, decir: «Una demostración cualquiera prueba *ante todo* que ha de resultar esta formación de signos cuando aplico esta regla a estas formaciones de signos»? O: «La demostración prueba ante todo que esta formación de signos puede resultar cuando se opera con estos signos según estas reglas de transformación».

Esto remitiría a una aplicación geométrica. Pues la proposición, cuya verdad, como digo, viene demostrada aquí, es una proposición geométrica, una proposición de la gramática, referente a las transformaciones de signos. Podría decirse, por ejemplo: está demostrado que tiene sentido decir que alguien ha obtenido el signo... a partir de... y de... según estas reglas; pero ningún sentido, etc.

O: Si se despojara a la matemática de todo contenido, quedaría que ciertos signos pueden construirse a partir de otros según reglas determinadas.

Lo mínimo que deberíamos aceptar sería: que este signo etc., y esta aceptación está a la base de cualquier otra.

Me gustaría decir ahora: La secuencia de signos de la demostración no conlleva necesariamente una cierta aceptación. Pero si hablamos de aceptación siquiera, no tiene por qué tratarse de la 'geométrica'.

Una demostración, ciertamente, podría constar simplemente de dos pasos; por ejemplo, de una proposición '$(x) \cdot fx$' y de un 'fa' —¿desempeña aquí un papel importante la transición correcta de acuerdo a una regla?

39. ¿*Qué* es lo incontrovertiblemente cierto en lo demostrado?

Aceptar como incontrovertiblemente cierta una proposición significa —yo diría— usarla como regla gramatical: con ello se la sustrae de la incertidumbre.

«La demostración ha de ser abarcable» significa propiamente no otra cosa que: la demostración no es un experimento. No aceptamos el resultado de una demostración porque ha resultado así una vez, ni porque resulta así a menudo. Sino que vemos en la demostración la razón para decir que *tiene que* resultar así.

Lo que *demuestra* no es que esa correlación lleve a ese resultado, sino que se nos persuada a tomar esas apariencias (imágenes) como propuestas de lo que resulta cuando...

La demostración es nuestro nuevo modelo de lo que resulta cuando no desaparece ni se añade nada, cuando contamos correctamente, etc. Pero estas palabras muestran que no sé muy bien de qué es la demostración un modelo.

Yo diría: con la lógica de los *Principia Mathematica* podría fundarse una aritmética en la que $1.000 + 1 = 1.000$; lo único necesario para ello sería dudar de la corrección sensible de los cálculos. Pero si no dudamos de ella, la culpa de ello no la tiene nuestro convencimiento de la verdad de la lógica.

Si en el curso de la demostración decimos: «*Tiene que* resultar esto», no es por motivos que no veamos.

El que consigamos este resultado no es lo que nos hace aceptarlo, sino el que sea el final de este camino.

La demostración es *lo que* nos convence: una imagen que no

nos convenza no es una demostración, aunque pueda mostrarse, incluso, que ejemplifica a la proposición demostrada.

Esto quiere decir: no tiene por qué ser necesario un análisis físico de la imagen demostrativa para mostrarnos lo que se ha demostrado.

40. Ante una imagen de dos personas no decimos, *ante todo*, que una parece más pequeña que la otra y, *sólo entonces*, que parece estar bastante más atrás. Es perfectamente posible, puede decirse, que no nos llame la atención en absoluto el menor tamaño, sino *sólo* el estar detrás. (Me parece que esto tiene que ver con la cuestión de la concepción 'geométrica' de la demostración.)

41. «Ella (la demostración) es el modelo de lo que se llama de tal y tal modo.»

Pero ¿de qué ha de ser modelo la transición de '$(x) \cdot fx$' a 'fa'? En el mejor de los casos de cómo puede inferirse a partir de signos como '$(x) \cdot fx$'.

Yo entendía el modelo como una justificación, pero aquí no se da justificación alguna. La imagen $(x) \cdot fx \therefore fa$ no *justifica* la conclusión. Si queremos hablar de una justificación de la conclusión, ella quedará fuera de este esquema de signos.

Y, sin embargo, algo hay en que la demostración matemática cree un nuevo concepto.—Toda demostración es, por así decirlo, una adhesión a un determinado uso de signos.

Pero ¿a qué es una adhesión? ¿Sólo a *ese* uso de las reglas de transición de fórmula a fórmula? ¿O una adhesión también, en algún sentido, a los 'axiomas'?

¿Podría decir: me adhiero a $p \supset p$ como una tautología?

Acepto '$p \supset p$' como máxima, por ejemplo, del inferir.

La idea de que la demostración crea un nuevo concepto podría expresarse más o menos así: La demostración no es sus fundamentos más las reglas de inferencia, sino una *nueva* casa, aunque un ejemplo de tal y tal estilo. La demostración es un *nuevo* paradigma.

El concepto que crea la demostración puede ser, por ejemplo, un nuevo concepto de inferencia, un nuevo concepto del correcto inferir. Pero *por qué* acepto esto como un inferir correcto, es algo cuyas razones quedan fuera de la demostración.

La demostración crea un nuevo concepto, por cuanto crea o es un nuevo signo. O por cuanto ofrece un nuevo puesto a la proposición que resulta de ella. (Pues la demostración no es un movimiento, sino un camino.)

42. No puede ser *imaginable* que *esta* sustitución en *esta* expresión produzca algo distinto. O: tengo que declararlo inimaginable. (El resultado de un experimento, sin embargo, puede salir así o de otro modo.)

Pero podría uno imaginarse el caso de que la demostración cambiara de aspecto: está grabada en una roca y se dice que es siempre la misma, seal cual sea lo que diga su apariencia externa.

¿Dices propiamente algo diferente a: la demostración se toma como *demostración*?

La demostración ha de ser un procedimiento visual. O también: la demostración es el procedimiento *visual*.

Es la demostración quien demuestra, y no algo detrás de la demostración.

43. Cuando digo: «ante todo ha de resultar evidente que *esta* sustitución produce realmente *esta* expresión», podría decir igualmente: «tengo que aceptarlo como algo indubitable», pero entonces hay que contar con buenas razones para ello: por ejemplo, que la misma sustitución dé prácticamente siempre el mismo resultado, etc. ¿Y no consiste en eso precisamente la abarcabilidad?

Yo diría que donde no hay visión de conjunto, donde aún hay lugar, pues, para la duda de si realmente lo que tenemos es el resultado de esa sustitución, allí la *demostración* queda destruida. Y no de una manera tonta y sin importancia, que no tenga nada que ver con la *esencia* de la demostración.

O: La lógica no actúa como tal fundamento de toda matemática, aunque nada más sea, porque la fuerza probatoria de las demostraciones lógicas se afirma y se derrumba con su fuerza geométrica probatoria[1].

Esto quiere decir: la demostración lógica, del tipo russelliano por ejemplo, es concluyente sólo en tanto que posee también fuerza geométrica de convicción. Y una abreviatura de una demostración lógica tal, puede tener esa fuerza de convicción y ser, por ella, una demostración, aun cuando no lo sea la construcción plenamente desarrollada al estilo russelliano.

---

[1] Cfr., sin embargo, § 38. (*Nota de los eds.*)

Nos inclinamos a creer que la demostración *lógica* posee una fuerza probatoria peculiar, absoluta, que proviene de la certidumbre incondicionada de las leyes lógicas fundamentales y de las leyes lógicas de inferencia. Mientras que las proposiciones así demostradas no pueden ser más ciertas que lo es la corrección de la *aplicación* de esas leyes de inferencia.

La certeza lógica de las demostraciones —diría yo— no alcanza más allá que su certeza geométrica.

44. Y bien, que la demostración sea un modelo es cosa que depende de lo que haya de valer como reproducción correcta de la demostración.

Si en la demostración, por ejemplo, aparece el signo '||||||||', no está claro entonces si ha de valer como reproducción suya sólo un grupo 'con el mismo número' de rayas (o de cruces, por ejemplo), o vale también otro número cualquiera, no demasiado pequeño. Etc.

Pero la cuestión es qué ha de valer como criterio de reproducción de la demostración, de igualdad de las demostraciones. ¿Cómo han de compararse para establecer su identidad? ¿Son iguales cuando parecen iguales?

Quiero, por así decirlo, mostrar que en la matemática podemos eludir las demostraciones lógicas.

45. «Mediante definiciones apropiadas podemos demostrar en la lógica russelliana que '25 × 25 = 625'.»—¿Y puedo explicar la técnica demostrativa ordinaria por la russelliana? Pero ¿cómo puede *explicarse* una técnica demostrativa por otra? ¿Cómo puede explicar una la *esencia* de la otra? Puesto que si una es una

'abreviatura' de la otra, ha de tratarse, entonces, de una abreviatura *sistemática*. Ciertamente necesita, a su vez, una demostración el que yo pueda abreviar sistemáticamente una demostración larga y consiga con ello otro sistema de demostraciones.

Las demostraciones largas acompañan en principio a las cortas y las tutelan, por así decirlo. Pero al final ya no pueden seguirlas y éstas muestran su independencia.

La consideración de las demostraciones lógicas *largas*, inabarcables, es sólo un medio para mostrar cómo puede malograrse esa técnica —que se basa en la geometría del demostrar— y cómo se hacen necesarias nuevas técnicas.

46. Me gustaría decir: la matemática es una ABIGARRADA *mezcla* de técnicas demostrativas.—Y en ello se basa su múltiple aplicabilidad y su importancia.

Y esto viene a ser lo mismo que decir: quien poseyera un sistema, como el russelliano, y creara a partir de él, mediante definiciones apropiadas, sistemas, como el cálculo diferencial, ése inventaría una parte nueva de la matemática.

Y bien, nos gustaría decir simplemente: si una persona hubiera inventado el cálculo en el sistema decimal, ¡ciertamente habría hecho una invención matemática! Aunque hubiera contado de antemano con los *Principia Mathematica* de Russell.

¿En qué consiste coordinar un sistema de demostraciones con otro? Hay entonces una regla de traslación mediante la cual pueden traducirse las proposiciones demostradas en uno a las demostradas en el otro.

Pero, ciertamente, uno puede imaginarse que algunos —o todos— sistemas demostrativos de la matemática actual estuvieran coordinados de esa manera a un sistema, por ejemplo al

russelliano. De modo que todas las demostraciones pudieran llevarse a cabo en ese sistema, aunque resultara prolijo hacerlo. Entonces sólo habría un sistema, ése —y ¿no los otros muchos sistemas?—Pero tiene que ser posible, ciertamente, mostrar respecto a *un* sistema que puede resolverse en muchos.—*Una* parte del sistema poseerá las características de la trigonometría, otra las del álgebra, y así sucesivamente. *Puede* decirse, por tanto, que en esas partes se aplican técnicas diferentes.

Dije: quien inventó el cálculo en el sistema decimal hizo ciertamente un descubrimiento matemático. Pero ¿no hubiera podido hacer ese descubrimiento en símbolos russellianos todo él? Habría descubierto, por así decirlo, un nuevo *aspecto*.

«Pero la verdad de las proposiciones matemáticas verdaderas puede demostrarse, sin embargo, a partir de aquellos fundamentos generales.»—Me parece que esto no está nada claro. ¿Cuándo decimos que una proposición matemática es verdadera?

Me parece que, sin saberlo, introducimos nuevos conceptos en la lógica russelliana.—Por ejemplo, cuando establecemos qué signos de la forma '$(\exists x, y, z \ldots)$' han de valer como equivalentes y cuáles no.

¿Se sobreentiende que '$(\exists x, y, z)$' no es el mismo signo que '$(\exists x, y, z)$'?

Pero ¿qué sucede si introduzco primero '$p \vee q$' y '$\sim p$' y construyo con ellos tautologías y presento después la serie $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc., e introduzco una notación como $\sim^1 p$, $\sim^2 p$, … $\sim^{10} p$…? Diría: quizá no hubiéramos pensado en absoluto, al principio, en la *posibilidad* de una secuencia así, pero ahora hemos introducido un nuevo concepto en nuestro cálculo. Aquí hay un 'nuevo aspecto'.

Aunque de modo muy primitivo e insuficiente, está claro que tendría que haber introducido así el concepto de número; pero este ejemplo me muestra todo lo que necesito.

¿Hasta qué punto puede ser correcto decir que con la serie $\sim p$, $\sim\sim p$, $\sim\sim\sim p$, etc., se ha introducido un nuevo concepto en la lógica?—Bien, ante todo podría decirse que eso se ha hecho con el '*etc.*'. Puesto que ese 'etc.' representa una ley de formación de signos nueva para mí. Característico de ello, el hecho de que se necesite una definición *recursiva* para la explicación de la notación decimal.

Se introduce una nueva *técnica.*

Puede decirse también así: quien posee el concepto de la construcción russelliana de demostraciones y proposiciones, *no* por ello posee todavía el concepto de todas las *series* de signos russellianos.

Yo diría: la fundamentación russelliana de la matemática pospone la introducción de nuevas técnicas, hasta que, finalmente, llega a creerse que ya no resulta necesaria.

(Sería quizá algo así como si yo filosofara tanto sobre el concepto de medición de longitudes que llegara a olvidar que para la medición de longitudes se necesita la determinación efectiva de una unidad de longitud.)

47. Lo que quiero decir puede expresarse *así* ahora: «Si hubiéramos aprendido desde el principio a ejercitar toda la matemática en el sistema de Russell, no por ello, con el cálculo de Russell, se hubiera inventado todavía el cálculo diferencial, por ejemplo. ¿Quién descubrió, por tanto, ese tipo de cálculo *en el cálculo de Russell*?»

Supongamos que tuviera ante mí demostraciones russellianas de las proposiciones

$$`p \equiv \sim\sim p'$$
$$`\sim p \equiv \sim\sim\sim p'$$
$$`p \equiv \sim\sim\sim\sim p'$$

y que encontrara ahora un camino abreviado para demostrar la proposición

$$`p \equiv \sim^{10} p'.$$

Es como si hubiera encontrado un nuevo tipo de cálculo dentro del viejo cálculo. ¿En qué consiste que haya sido encontrado?

Dime: ¿He descubierto un nuevo tipo de cálculo cuando he aprendido a multiplicar, resultando ahora que multiplicaciones, cuyos factores sean todos iguales, me saltan a la vista como una rama especial de esos cálculos, e introduzco, por ello, la notación '$a^n = \ldots$'?

Evidentemente no importa que el modo de notación sea el 'abreviado' u *otro:* '16^2' en lugar de '16×16'. Lo importante ahora es que simplemente *contamos* los factores.

¿Es '16^{15}' sólo otro modo de notación de '$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$'?

La demostración de que $16^{15} = \ldots$ no consiste simplemente en que multiplico 16 quince veces por sí mismo, y en que, al hacerlo, resulta tanto, sino que la demostración ha de mostrar que pongo 15 *veces* el número como factor.

Cuando pregunto: «Qué es lo nuevo en el 'nuevo modo de cálculo' del elevar a una potencia», es difícil contestar. La palabra 'aspecto nuevo' es vaga. Quiere decir que ahora contemplamos el asunto de otro modo, pero la cuestión es: ¿cuál es la manifestación esencial, *importante*, en este 'contemplar de otro modo'?

Quiero decir primero: «No tendría por qué haberle *saltado a la vista* a alguien jamás que en ciertos productos todos los factores son iguales». o: «'Producto cuyos factores sean todos iguales' es un nuevo concepto», o: «Lo nuevo consiste en que clasificamos las operaciones de cálculo de modo diferente». Lo esencial al elevar a una potencia, obviamente, es que nos fijamos en el *número* de factores. No se ha dicho que nos hayamos fijado jamás en el número de factores. No tiene por qué habernos saltado a la vista que hay productos con 2, 3, 4, etc., factores, aunque hayamos resuelto ya a menudo tales productos. Un aspecto nuevo, pero otra vez: ¿cuál es su lado *importante*? ¿Para qué utilizo lo que me ha saltado a la vista?—Bien, ante todo lo transcribo quizá en una notación. Así, por ejemplo, en lugar de '$a \times a$' escribo 'a^2'. Con ello me remito a la serie de números (aludo a ella), cosa que no había sucedido antes. ¡Creo, pues, una nueva conexión!—Una conexión, ¿entre qué cosas? Entre la técnica de contar factores y la técnica de multiplicar.

Pero ¡así cualquier demostración, cualquier cálculo concreto, hace nuevas conexiones!

Pero la *misma* demostración que muestra que $a \times a \times a \times a \ldots = b$ muestra también que $a^n = b$; sólo que hemos de hacer la transición de acuerdo con la definición de 'a^n'.

Pero precisamente esta transición es lo nuevo. Pero si es sólo una transición a la antigua demostración, ¿cómo puede ser importante?

'Se trata sólo de otro modo de notación.' ¿Dónde termina, de ser meramente otro modo de notación?

¿No allí: donde sólo puede utilizarse así y así uno de los modos de notación y no el otro?

Podría denominarse «encontrar un nuevo aspecto» a que alguien escriba '$(a)f$' en lugar de '$f(a)$'; podría decirse: «El

considera la función como argumento de su argumento.» O si alguien escribiera '× *a*' en vez de '*a* × *a*', podría decirse: «Lo que antes se consideraba como caso especial de una función con dos lugares argumentales lo considera él ahora como función con *un* lugar argumental.»

Quien hace eso, realmente ha cambiado en un sentido el aspecto, ha clasificado, comparado, por ejemplo, *esa* expresión con otras con las que no había sido comparada antes.—Pero ¿es esto un cambio de aspecto *importante*? *No*, mientras no conlleve ciertas consecuencias.

Es harto verdadero que mediante la introducción del concepto de *número* de negaciones he cambiado el aspecto del cálculo lógico: «Nunca lo he contemplado así», podría decirse. Pero ese cambio sólo resulta importante cuando incide en la aplicación del signo.

Concebir un pie como 12 *pulgadas* significaría, en verdad, cambiar el aspecto del pie, pero ese cambio sólo resultaría importante a la hora de *medir* de hecho longitudes en pulgadas.

Quien introduce el contar los signos de negación, introduce un nuevo tipo de reproducción de signos.

Es verdad que la aritmética habla, efectivamente, de la igualdad de números, sin importarle en absoluto cómo se determina la igualdad numérica de dos clases; pero no resulta indiferente para sus inferencias el modo como sus signos se comparan unos con otros, el método, pues, de acuerdo al cual se determina, por ejemplo, si el número de cifras de dos signos numéricos es el mismo.

No es lo importante la introducción de los signos numéricos como abreviaturas, sino el *método* de contar.

48. Quiero explicar lo abigarrado de la matemática.

49. «También en el sistema de Russell puedo desarrollar la demostración de que 127 : 18 = 7,05.» Por qué no.—Pero ¿en la demostración russelliana tiene que resultar lo mismo que en la división corriente? Ambas, efectivamente, están conectadas mutuamente por un *calculo* (por reglas de traducción, por ejemplo); pero ¿no resulta arriesgado realizar la división según la nueva técnica, dado que la verdad del resultado depende ahora de la geometría de la traslación?

Y si alguien dijera ahora: «Eso es absurdo, tales consideraciones no importan para nada en la matemática.»

Pero no se trata de inseguridad, ya que nosotros estamos seguros de nuestras inferencias, sino de si ejercitamos aún la lógica (russelliana) al *dividir*, por ejemplo.

50. La importancia de la trigonometría reside originariamente en su conexión con mediciones de longitudes y de ángulos: es una parte de la matemática, orientada a la aplicación a mediciones de longitudes y ángulos.

A la aplicabilidad en ese campo podría llamársela también un 'aspecto' de la trigonometría.

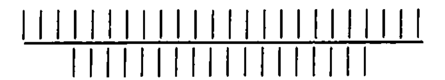
Si divido un círculo en partes iguales y determino por medición el coseno de una de esas partes, ¿es esto un cálculo o un experimento?

Si un cálculo, ¿sería un cálculo ABARCABLE?
¿Es *abarcable* el calcular con el ábaco?

Si el coseno de un ángulo hay que determinarlo por medición, ¿es, entonces, una proposición de la forma 'cos $x = n$' una proposición *matemática*? ¿Cuál es el criterio para decidirlo? ¿Expresa la proposición algo externo sobre nuestros cartabones, etc., o algo interno sobre nuestros conceptos? —¿Cómo modificar esto?

¿Pertenecen las figuras (dibujos) de la trigonometría a la matemática pura, o son sólo ejemplos de una posible *aplicación*?

51. Si hay algo verdadero en lo que pretendo decir, entonces el cálculo en la notación decimal, por ejemplo, ha de tener su vida propia.—Naturalmente, cualquier número decimal puede representarse de esta forma:



y, por ello, en esa notación pueden realizarse los cuatro tipos de operaciones de cálculo. Pero la vida de la notación decimal debería ser independiente del calcular con rayas.

52. En este contexto siempre se me ocurre lo mismo: que es verdad que en la lógica de Russell puede *demostrarse* una proposición '$a : b = c$', pero que ella no nos enseña a construir una correcta proposición de esa forma, es decir, que no nos enseña a *dividir*. El procedimiento del dividir correspondería, por ejemplo, al de una *comprobación sistemática* de demostraciones russellianas con el fin, por ejemplo, de obtener la demostración de una proposición de la forma '$37 \times 15 = x$'. «Pero la técnica de una comprobación sistemática así, se basa ella misma en la lógica. Y puede probarse, a su vez, lógicamente que esa técnica ha de conducir hasta la meta.» Es semejante, pues, a cuando demostramos en Euclides que esto y esto puede construirse así y así.

53. ¿Qué quiere mostrar alguien que quiere mostrar que la matemática no es lógica? Quiere decir algo como: Si se envuelven en suficiente papel mesas, sillas, armarios, etc., al final todos parecerán, ciertamente, redondos.

No quiere mostrar que sea imposible construir para cada demostración matemática una russelliana (de algún modo) 'correspondiente', sino que la aceptación de tal correspondencia no se funda en la lógica.

«¡Pero siempre podemos volver, en verdad, al método lógico primitivo!» Bueno, suponiendo que podamos, ¿cómo es que no *tenemos que* hacerlo? ¿O es que somos precipitados, imprudentes, cuando no lo hacemos?

Pero ¿cómo encontramos el camino de regreso a la expresión primitiva? ¿Recorremos, por ejemplo, el camino a través de la demostración secundaria y, desde su final, regresamos al sistema primario y miramos a dónde hemos llegado así; o avanzamos en ambos sistemas y conectamos después los puntos finales? Y ¿cómo sabemos que en el sistema primario llegamos al mismo resultado en ambos casos?

¿No posee poder de convicción el proceder en el sistema secundario?

«¡Pero a cada paso en el sistema secundario podemos imaginarnos que podría haberse dado también en el primario!»—Eso es precisamente: *podemos imaginarnos que podría haberse dado*, sin que lo demos.

¿Y por qué aceptamos uno en lugar del otro? ¿Por motivos *lógicos*?

«Pero ¿no puede demostrarse lógicamente que ambas transformaciones tienen que llegar al mismo resultado?»—Pero ¡aquí

se trata del resultado de transformaciones de signos! ¿Cómo puede decidir esto la lógica?

54. ¿Cómo puede la demostración en el sistema de rayas demostrar que la demostración en el sistema decimal es una demostración?

Bueno, ¿no sucede aquí con la demostración en el sistema decimal lo que con una *construcción* en Euclides, de la que se demuestra que es realmente una construcción de tal y tal figura?

¿Puedo decirlo así?: «La traslación del sistema de rayas al sistema decimal presupone una definición recursiva. Sin embargo, esa definición no introduce la abreviatura de *una* expresión por otra. Pero la demostración inductiva en el sistema decimal no contiene, naturalmente, el conjunto de aquellos signos que había que traducir en signos de rayas mediante la definición recursiva. Por ello, esa demostración general no puede ser traducida a una demostración del sistema de rayas mediante la definición recursiva.»

La demostración recursiva introduce una nueva técnica de signos.—Tiene, por tanto, que hacer la transición a una nueva 'geometría'. Se nos enseña un nuevo método para reconocer signos. Se introduce un nuevo criterio de identidad de signos.

55. La demostración nos muestra lo que CONVIENE que salga.—Y dado que cualquier reproducción de la demostración tiene que demostrar lo mismo, por una parte, tiene que reproducir, pues, automáticamente el resultado, pero, por otra, también la *compulsión* a conseguirlo.

Esto es: no reproducimos sólo las *condiciones* bajo las cuales se produjo una vez este resultado (como en el experimento), sino el resultado mismo. Y, en tanto en cuanto tiene que poder volver

a conducirnos siempre, la demostración no es, ciertamente, un juego amañado.

Por una parte, hemos de poder reproducir íntegramente la demostración de modo automático, y, por otra, esa reproducción tiene que ser, a su vez, una *demostración* del resultado.

«La demostración tiene que ser abarcable» pretende dirigir nuestra atención, propiamente, a la diferencia entre los conceptos: 'repetir una demostración', 'repetir un experimento'. Repetir una demostración no significa: repetir las condiciones bajo las cuales se consiguió una vez un resultado concreto, sino repetir cada paso *y el resultado*. Y aunque así la demostración es algo que ha de poder reproducirse del todo automáticamente, cada una de esas reproducciones, sin embargo, ha de contener la compulsión demostrativa a aceptar el resultado.

56. ¿Cuándo decimos: que un cálculo 'corresponda' a otro es sólo una forma abreviada del primero?—«Bueno, cuando por medio de definiciones apropiadas los resultados de éste pueden transferirse a resultados de aquél.» Pero ¿ya se ha dicho cómo hay que calcular con esas definiciones? ¿Qué es lo que nos permite aceptar esa transferencia? ¿No será ella, en definitiva, un juego amañado? Así es, en efecto, cuando estamos decididos a aceptar sólo la transferencia que nos lleva al resultado a que estamos acostumbrados.

¿Por qué consideramos una parte del cálculo russelliano la correspondiente al cálculo diferencial?—Porque en él se demuestran las proposiciones del cálculo diferencial.—Pero ¿no al final, *post hoc*?—Y ¿no da lo mismo? ¡Es suficiente que en el sistema russelliano se encuentren demostraciones de esas proposiciones! Pero ¿no son demostraciones de esas proposiciones sólo cuando sus resultados únicamente pueden traducirse a *esas* proposiciones? Pero ¿vale esto incluso en el caso del multiplicar en el sistema de rayas con rayas numeradas?

57. Hay que decir claramente ahora que, normalmente, los cálculos en la notación de rayas siempre concuerdan con los de la notación decimal. Quizá, para alcanzar una concordancia cierta, hayamos de llegar al punto de hacer que *varias* personas repasen la operación de cálculo con rayas. Y lo mismo haremos con operaciones con números aún mayores en el sistema decimal.

Pero esto muestra ciertamente ya: que no son las demostraciones en el sistema de rayas las que hacen concluyentes a las demostraciones en el sistema decimal.

«Si no se tuvieran éstas, se podrían utilizar las otras para demostrar lo mismo.»—¿Lo mismo? ¿Qué es lo mismo?—Bueno, la demostración con rayas me convencerá de lo mismo, aunque no del mismo modo.—Y si yo dijera: «El lugar a donde nos lleva una demostración no puede determinarse independientemente de esa demostración.»—¿He sido convencido por una demostración en el sistema de rayas de que la proposición demostrada posee la aplicabilidad que le proporciona la demostración en el sistema decimal; se ha mostrado en el sistema de rayas, por ejemplo, que la proposición es demostrable también en el sistema decimal?

58. Naturalmente, sería absurdo decir que *una* proposición no puede tener varias demostraciones, pues eso es lo que decimos precisamente. Pero ¿no puede decirse: *Esta* demostración muestra que cuando se hace *esto* resulta...; la otra muestra que esa expresión se produce cuando se hace algo diferente?

¿Es, pues, el hecho matemático, por ejemplo, de que 129 es divisible por 3, independiente de que *este* resultado se produzca en *esta* operación? Quiero decir: el hecho de esa divisibilidad ¿es independiente del cálculo en el que se produce; o es un hecho de ese cálculo?

Supón que se dijo: «Mediante el cálculo aprendemos a conocer las propiedades de los números.»

«Dos demostraciones demuestran lo mismo si me convencen de lo mismo.»—¿Y cuándo me convencen de lo mismo? ¿Cómo sé yo que me convencen de lo mismo? No por introspección, naturalmente.

Por varios caminos puede llevárseme a aceptar esa regla.

59. «Toda demostración muestra no sólo la verdad de la proposición demostrada, sino también que ella puede demostrarse *así*.»—Pero esto último puede demostrarse también de otro modo.—«Sí, pero la demostración demuestra eso de un modo determinado y demuestra con ello que se puede demostrar de ese modo.»—Pero también *eso* podría mostrarse mediante otra demostración. —«Sí, pero no precisamente de ese modo.»
Pero esto quiere decir aproximadamente: Esa demostración es una entidad matemática que no puede reemplazarse por inguna otra; puede decirse que ella puede convencernos de algo de lo que no puede convencernos ninguna otra cosa, y puede expresarse esto asignándole una proposición que no se asigna a ninguna otra demostración.

60. Pero ¿no cometo un fallo grosero? Porque es francamente esencial a las proposiciones de la aritmética y a las proposiciones de la lógica russelliana que conduzcan a ellas diferentes demostraciones. Sí, incluso que a cada una de ellas conduzcan un número infinito de demostraciones.

¿Es correcto decir que toda demostración nos convence de algo de lo que sólo ella puede convencernos? ¿No sería, entonces, superflua —por así decirlo— la proposición demostrada, y lo demostrado, incluso, la demostración misma?

¿Me convence la demostración sólo de la proposición demostrada?

¿Qué quiere decir: «una demostración es una entidad matemática que no puede reemplazarse por ninguna otra»? Quiere decir que toda demostración concreta posee una utilidad que no posee ninguna otra. Podría decirse: «que toda demostración, incluso de una proposición ya demostrada, supone una contribución a la matemática». ¿Por qué supone una contribución, si lo único que importa es demostrar la proposición? Bueno, puede decirse: «la nueva demostración muestra (o *hace*) una conexión nueva». (Pero ¿no hay, entonces, una proposición matemática que diga que esta conexión existe?)

¿Qué *aprendemos*, cuando vemos la nueva demostración, a parte de la proposición que, de todos modos, ya conocemos? ¿Aprendemos algo que no puede expresarse en una proposición matemática?

61. ¿Hasta qué punto la aplicación de una proposición matemática depende de lo que se haga valer como demostración suya y de lo que no?

Puedo decir, ciertamente: si la proposición '137 × 373 = 46.792' es verdadera en el sentido ordinario, *tiene que haber*, *entonces*, *una figura de la multiplicación*, a cuyos extremos estén los dos lados de esa equivalencia. Y una figura de la multiplicación es un patrón que satisface ciertas reglas.

Quiero decir: Si no aceptara la figura de la multiplicación como *una* demostración de la proposición, entonces, con ello, caería también la aplicación de la proposición a figuras de la multiplicación.

62. ¡Consideremos que no es suficiente que dos demostraciones se encuentren en el mismo signo proposicional! Pues ¿cómo sabemos que ese signo dice lo mismo en ambos casos? *Esto* ha de provenir de otros contextos.

63. La *exacta* correspondencia de una transición correcta (convincente) en la música y en la matemática.

64. Supón que encargo a alguien: «Busca una demostración de la proposición...» —la solución sería, ciertamente, que él me propusiera ciertos signos. Está bien: *¿qué* condición han de satisfacer esos signos? Tienen que ser una demostración de aquella proposición —pero ¿es esto, quizá, una condición *geométrica*? ¿O una psicológica? A veces podría denominárselo una condición geométrica; allí donde ya están prescritos los medios demostrativos y sólo se busca ya una combinación determinada.

65. ¿Son las proposiciones de la matemática proposiciones antropológicas, que dicen cómo inferimos y calculamos nosotros, los hombres?—¿Es un libro de leyes una obra sobre antropología, que nos dice cómo trata la gente de ese pueblo a un ladrón, etc.?—¿Podría decirse: «El juez consulta un libro de antropología y condena después al ladrón a una pena de cárcel»? Bueno, el juez no USA el libro de leyes como manual de antropología.

66. La profecía *no* dice que el hombre, si sigue esta regla de transformación, conseguirá *eso*, sino que, si nosotros *decimos* que sigue la regla, conseguirá eso.

¿Y si dijéramos que las proposiciones matemáticas son profecías en *este* sentido: en cuanto que predicen lo que conseguirán miembros de una sociedad, que han aprendido esta técnica, en conjunción con los restantes miembros de la sociedad? '25 × 25 = 625' significaría, por tanto, que personas que, en nuestra opinión, siguen las reglas de multiplicar, en la multiplicación 25 × 25 llegarán al resultado 625.—Es indudable que esto es una predicción correcta; y también que la esencia del cálculo se funda en tales predicciones. Es decir, que no denominaríamos a algo 'calcular', si no pudiéramos hacer con seguridad una profecía así. Esto significa propiamente: el calcular es una técnica. Y lo que hemos dicho pertenece a la esencia de una técnica.

67. Al cálculo pertenece *esencialmente* ese consenso, esto es seguro. Es decir: al fenómeno de nuestro calcular pertenece ese consenso.

En una técnica de *cálculo* las profecías han de ser posibles. Y esto hace semejante la técnica del cálculo a la técnica de un juego, como el ajedrez.

Pero ¿qué sucede con el consenso —no significa esto que *un* hombre solo no puede calcular? Bueno, en todo caso *un* hombre no podría calcular sólo *una vez* en su vida.

Podría decirse: todas las *posibles* posiciones de juego en el ajedrez podrían concebirse como proposiciones que dicen que ellas (mismas) son posiciones de juego *posibles;* o también como profecías: los hombres podrán alcanzar esas posiciones por jugadas que ellos declaran, consensuadamente, de acuerdo con las reglas. Una posición de juego así *conseguida* es, pues, una proposición demostrada de ese tipo.

«Una operación de cálculo es un experimento.»—Una operación de cálculo puede ser un experimento. El profesor deja que el alumno haga una operación para ver si sabe calcular; eso es un experimento.

Cuando por la mañana temprano se prende la estufa, ¿es eso un experimento? Pero podría ser uno.
Y así, los movimientos del ajedrez *no* son demostraciones tampoco, ni las posiciones del ajedrez, proposiciones. Ni las proposiciones matemáticas, posiciones de juego. Y *así*, tampoco profecías.

68. Si una operación de cálculo es un experimento ¿qué es, entonces, un fallo en la operación? ¿Un fallo en el experimento?

No, desde luego; hubiera sido un fallo en el experimento si no hubiera mantenido las *condiciones* del experimento, si hubiera hecho, por ejemplo, que alguien calculara en medio de un ruido espantoso.

Pero ¿por qué no he de decir: un fallo en el cálculo no es, ciertamente, un *fallo* en el experimento, pero sí un *extravío* —explicable a veces, a veces no— del experimento?

69. «Una operación de cálculo, una multiplicación por ejemplo, es un experimento: *no sabemos lo que va a resultar* y sólo lo conocemos cuando la multiplicación está acabada.»—Cierto; cuando vamos de paseo tampoco sabemos en qué punto nos encontraremos dentro de 5 minutos, pero ¿es, por eso, un experimento el salir de paseo?—Bien; pero en la operación yo quería saber de antemano lo que resultaría; *eso* era precisamente lo que me interesaba. Lo que me produce expectación es el resultado. Pero no como aquello que *voy a* decir, sino como aquello que *conviene* que diga.

Pero ¿no te interesa en esa multiplicación cómo calculará la generalidad de las personas? No —al menos no ordinariamente— aunque corra a encontrarme con todas en un punto común.

Pero la operación, ciertamente, me muestra experimentalmente, con exactitud, dónde queda ese punto de encuentro. Me pongo en marcha, por así decirlo, y veo dónde acabo. Y la multiplicación correcta es la imagen de cómo marchamos todos cuando estamos educados *así*.

La *experiencia* enseña que todos nosotros consideramos correcta esa operación.

Nos ponemos en marcha y alcanzamos el resultado de la operación. Pero no nos interesa —yo diría— haber producido

ahora este resultado —bajo estas y estas condiciones, por ejemplo; lo que nos interesa es la imagen de la marcha, ciertamente en tanto imagen convincente, *harmoniosa*, digamos, pero no como resultado de un experimento, sino como un *camino*.

No decimos: «¡Y bien, *así* vamos nosotros!», sino: «¡Y bien, *así* va eso!»

70. Nuestra aceptación marcha a la par, pero no nos servimos de esa paridad de la marcha sólo para predecir caminos de aceptación. Igual que no nos *servimos* de la proposición «este cuaderno es rojo» sólo *para* predecir que la mayoría de las personas llamarían al cuaderno 'rojo'.

«Y a esto es a lo que llamamos 'lo mismo'.» Si no hubiera coincidencia ninguna respecto a lo que llamamos 'rojo', etc., el lenguaje acabaría. Pero ¿qué hay respecto a la coincidencia en lo que llamamos 'coincidencia'?

Podemos describir el fenómeno de una confusión de lenguaje; pero ¿cuáles son para nosotros los indicios de una confusión de lenguaje? No necesariamente tumulto y barullo en la acción. Más bien: que no me aclaro cuando la gente habla; que no puedo reaccionar de acuerdo con ellos.

«Para mí esto no es un juego de lenguaje.» Pero también podría decir: Es verdad que ellos acompañan sus acciones de sonidos lingüísticos y que no puedo llamar 'confusas' sus acciones, pero no poseen lenguaje alguno.—Pero quizá se volverían confusas sus acciones si se les impidiera emitir esos sonidos.

71. Podría decirse: Una demostración ayuda al *acuerdo*.

Un experimento lo presupone.

O también: Una demostración matemática moldea nuestro lenguaje.

Pero sigue valiendo que mediante una demostración matemática se pueden hacer predicciones científicas sobre el demostrar de otras gentes.

Si alguien me pregunta: «¿De qué color es ese libro?» y yo respondo: «Es verde.»—¿Podría él haber dado igualmente la respuesta: «La generalidad de los hispanoparlantes llama 'verde' a esto»?

¿No podía él preguntar entonces: «¿Y cómo lo llamas *tú*?»? Porque quisiera conocer mi reacción.

'Los límites del empirismo[2]*.'*

72. Hay, ciertamente, una ciencia de los reflejos condicionados del cálculo; ¿es ella la matemática? Esa ciencia se apoyará en experimentos: y esos experimentos serán *operaciones de cálculo.* Pero ¿y si esa ciencia se hace muy exacta y al final se convierte, incluso, en una ciencia 'matemática'?

¿Es el resultado de esos experimentos que los seres humanos coincidan en sus cálculos, o que coincidan en lo que llaman 'coincidir'? Y así sucesivamente.

Podría decirse: esa ciencia no funcionaría si no coincidiéramos con respecto a la idea de coincidencia.

Está claro que podemos utilizar una obra matemática para el estudio de la antropología. Pero hay algo que no está claro: si conviene que digamos: «Este escrito nos muestra cómo este pueblo operaba con signos», o si conviene que digamos: «Este escrito nos muestra qué partes de la matemática dominó este pueblo.»

---

[2] Se refiere probablemente al artículo de Russell «The Limits of Empiricism». *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1935-36. (*Nota de los editores.*)

73. ¿Puedo decir, llegando al término de una multiplicación: «Así, pues, coincido *con ello*!»?—Pero ¿puedo decir eso en un *paso* de la multiplicación? ¿Por ejemplo, en el paso '2 × 3 = 6'? ¿No menos de lo que puedo decir, mirando este papel: «Así pues, a esto lo llamo yo 'blanco'»?

Me parece que es semejante el caso en que alguien dijera: «Si intento recordarme de lo que he hecho hoy, hago un experimento (me pongo en marcha), y el recuerdo que me llega entonces sirve para mostrarme lo que otros, que me han visto, responderán a la pregunta, qué he hecho.»

¿Qué sucedería si ocurriera con frecuencia que hacemos una operación y la encontramos correcta; que después la comprobamos y encontramos que está mal: que creemos que antes hemos pasado algo por alto, y si la volvemos a repasar nos parece que nuestra segunda operación no es correcta, y así sucesivamente?

¿Conviene o no ahora que llame a esto calcular?—En todo caso él no puede construir sobre su operación de cálculo la predicción de que la próxima vez volverá a tomar tierra allí. ¿Podría yo decir, sin embargo, que esta vez él ha calculado *mal* porque la próxima vez no ha vuelto a calcular así? Yo podría decir: donde existe *esa* incertidumbre no hay cálculo alguno.

Pero, por otra parte, vuelvo a decir: «Tal como se calcula, así es lo correcto.» No *puede* existir fallo alguno de cálculo en '12 × 12 = 144'. ¿Por qué? Esta proposición ha sido incluida entre las reglas.

Pero ¿es '12 × 12 = 144' la declaración de que es natural a todos los seres humanos resolver 12 × 12 de tal modo que resulte 144?

74. Cuando repaso varias veces una operación para estar seguro de que he calculado bien, y cuando la acepto, entonces, como correcta, ¿no he repetido ahí un experimento para estar

seguro de que la próxima vez volveré a proceder del mismo modo? Pero ¿por qué un triple repaso habría de convencerme de que la tercera vez procederé de igual modo?—Yo diría: la he repasado para estar seguro 'de que no he pasado nada por alto'.

El peligro está aquí, creo, en dar una justificación de nuestro proceder, donde no hay justificación alguna y donde habríamos de decir simplemente: *así lo hacemos.*

Cuando alguien monta repetidas veces un experimento, 'siempre con el mismo resultado', ¿ha hecho a la vez un experimento que le enseñe a *qué* llama él 'el mismo resultado', cómo usa, por tanto, la palabra «igual»? ¿Mide también el metro quien mide la mesa con él? Si mide el metro, no puede al mismo tiempo medir la mesa.

¿Y si yo dijera: «Si alguien mide la mesa con un metro, hace a la vez un experimento que le enseña lo que resultaría al medir esa mesa con *todos los demás* metros»? No hay duda alguna, en efecto, de que por la medida con *un* metro puede predecirse lo que resultará de la medida con otros metros. Y, también, de que si eso no pudiera hacerse, se desmoronaría todo nuestro sistema de medición.

Ningún metro sería correcto, podría decirse, si no coincidieran todos en general.—Pero cuando digo esto, no quiero decir que, entonces, todos serían *falsos.*

75. El cálculo perdería su gracia si sobreviniera la *confusión.* Como perdería su gracia el uso de las palabras «verde» y «azul». Y, sin embargo, parece absurdo decir que una proposición aritmética *dice:* no se presentará confusión alguna.—¿Es la solución simplemente que la proposición aritmética, si se presentara confusión, no se volvería *falsa*, sino inútil?

Igual que la proposición: esta habitación tiene 16 pies de larga, no se volvería *falsa* si surgiera la confusión en los patrones de medida y en el medir. Su sentido, no su verdad, se basa en el proceso regular de las mediciones. (No seas aquí dogmático. Hay pasos que dificultan la observación.)

Y si yo dijera: la proposición aritmética expresa la confianza de que no se producirán confusiones.

Entonces, el uso de todas las palabras expresa la confianza de que no se producirán confusiones.

Pero no puede decirse, sin embargo, que el uso de la palabra «verde» manifieste que no se producirán confusiones, porque, entonces, el uso de la palabra «confusión» habría de volver a manifestar lo mismo sobre *esa* palabra.

Si '25 × 25 = 625' expresa la confianza de que siempre volveremos a coincidir fácilmente en que hay que tomar el camino que termina con esa proposición, ¿por qué esa proposición, entonces, no expresa la otra confianza de que podríamos volver a coincidir siempre con respecto a *su* uso?

Con ambas proposiciones no jugamos el mismo juego de lenguaje.

O ¿puede estarse tan confiado como aquí de que allí se verá el mismo color, y también: de que, si el color es el mismo, uno se inclinará a llamarlo del mismo modo?

Quiero decir, sin embargo: La matemática, como tal, es siempre la medida y no lo medido.

76. El concepto de cálculo excluye la confusión.—¿Y si alguien, al calcular una multiplicación, consiguiera diferentes resultados en diferentes tiempos, y *viera* esto, pero le pareciera bien?—¡Pero, entonces, no podría usar la multiplicación para los fines que nosotros lo hacemos!—¿Por qué no? Tampoco se ha dicho que tuviera que salirle mal el asunto.

La concepción del cálculo como experimento se nos presenta fácilmente como la única *realista*.

Todo lo demás, pensamos, es desatino. En el experimento contamos con algo tangible. Es casi como si alguien dijera: «Un poeta, cuando poetiza, realiza un experimento psicológico. Sólo así puede explicarse que un poema pueda tener algún valor.» Se malentiende la esencia del '*experimento*', por cuanto se cree que todo proceso, cuyo final esperamos con impaciencia, es lo que denominamos «experimento».

Parece oscurantismo decir que una operación de cálculo no es un experimento. E igualmente el aserto de que la matemática no *trata* de signos, o que el dolor no es una forma de comportamiento. Pero sólo porque la gente cree que con ello se afirma la existencia de un objeto intangible, es decir, fantasmal, al lado del que todos palpamos. Mientras que nosotros sólo nos referimos a diversas maneras de uso de las palabras.

Es casi como si alguien dijera: 'azul' ha de designar un objeto azul —si no, no se comprendería la finalidad de una palabra.

77. He inventado un juego —en él, quien comienza tiene que ganar siempre: No es, por tanto, un juego. Cambio eso; ahora está bien.

¿He hecho un experimento, y era el resultado que quien comienza siempre gana? O: ¿qué estamos inclinados a jugar de modo que esto suceda? No.—¡Pero ese resultado no te lo habrías esperado! Verdad que no; pero esto no convierte al juego en experimento.

Pero ¿qué significa: No saber *en qué reside* que siempre haya de acabar así? Bueno, reside en las reglas.—Quiero saber cómo he de transformar las reglas para conseguir un juego auténtico. Puedes cambiarlas *completamente*, por ejemplo.—O sea, ofrecer, en lugar del tuyo, un juego completamente diferente.—Pero no

quiero eso. Quiero mantener en general las reglas y eliminar sólo un fallo.—Pero eso resulta vago. Simplemente, *no está claro* qué hay que entender por ese fallo.

Es casi como cuando se dice: ¿Cuál es el fallo en esta pieza musical? No suena bien en los instrumentos.—Bien, el fallo no hay por qué buscarlo en la instrumentación; *podría* buscarse en los temas.

Supongamos, sin embargo, que el juego sea tal que quien comienza siempre puede ganar mediante una sencilla artimaña concreta. Pero no se ha caído en ella; se trata, pues, de un juego. Ahora alguien nos pone en antecedentes, y deja de ser un juego.

¿Cómo puedo conseguir que ello me resulte claro?—Bien, yo diría: «Y deja de ser un juego.»—No: «Y ahora vemos que no era un juego.»

Esto significa, yo diría, ello se puede entender también así: que el otro no nos ha *puesto en antecedentes* de nada; sino que, en lugar del nuestro, él ha aprendido otro juego.—Pero ¿cómo pudo el viejo volverse obsoleto a causa del nuevo?—Ahora vemos otra cosa y no podemos ya seguir jugando ingenuamente.

Por una parte, el juego consistía en nuestras acciones (movimientos de juego) sobre el tablero; y esas jugadas podría yo realizarlas ahora tan bien como antes. Pero, por otra parte, al juego le resultaba esencial que yo intentara ciegamente vencer; y eso ya no puedo hacerlo ahora.

78. Supongamos: los seres humanos, originariamente, practicaron de modo usual las cuatro operaciones de cálculo. Luego comenzaron a calcular con expresiones entre paréntesis, incluyendo algunas de la forma (*a*-*a*). Repararon, entonces, en que las multiplicaciones, por ejemplo, se hacían ambiguas. ¿Era obligado

que esto los llenara de confusión? ¿Necesitaban decir: «Ahora parece que vacila el fundamento de la aritmética»?

Y si ahora reclaman una prueba de la consistencia, porque, si no, a cada paso estarían en peligro de caer al pantano —¿qué es lo que reclaman? Bien, reclaman un *orden*. Pero ¿antes *no* había orden?—Bien, reclaman un orden que les tranquilice ahora.—Pero ¿es que son como niños a quienes hay que arrullar?

Y bien, la multiplicación se volvería prácticamente inservible a causa de su ambigüedad; esto es: para sus normales objetivos anteriores. Ya no resultarían más predicciones basadas en multiplicaciones.—(Si quisiera predecir la longitud de la fila de soldados que puede formarse a partir de un cuadrado de 50 × 50, siempre volvería a conseguir resultados falsos.)

¿Es, por tanto, falsa esta manera de calcular?—Bueno, es inservible para *estos* fines. (Quizá es útil para otros.) ¿No es como si una vez dividiera en lugar de multiplicar? (Como puede suceder realmente.)

Qué quiere decir: «¡En este caso has de *multiplicar;* no dividir!»

¿Es la multiplicación usual un juego *auténtico*, es *imposible* dar un traspiés? Y ¿no es el cálculo con (*a*-*a*) un juego auténtico —es imposible *no* dar un traspiés?

(¡*Describir*, no explicar, es lo que queremos!)

Bien ¿qué sucede cuando no tenemos mucha práctica en nuestro cálculo?

Como sonámbulos caminábamos entre abismos.—Pero aunque ahora digamos: «Ahora estamos despiertos», ¿podemos estar seguros de que no despertaremos un día? (Y digamos entonces: o sea, que nos hemos vuelto a dormir.)

¿Podemos estar seguros de que no hay abismos ahora, que no vemos?

Pero, y si yo dijera: ¡En un cálculo, los abismos no están ahí si yo no los veo!

¿No nos engaña ahora un diablillo? Bueno, si nos engaña, no importa. Ojos que no ven, corazón que no siente.

Supongamos que a veces divido así por 3:

y a veces así:

y que no me doy cuenta.—Entonces, alguien me advierte de ello.

¿De un error? ¿Se trata necesariamente de un error? Y ¿bajo qué circunstancias lo llamamos así?

79. $\sim f(f) = \varphi(f)$ Def.

$$\varphi(\varphi) = \sim(\varphi).$$

Las proposiciones '$\varphi(\varphi)$' y '$\sim \varphi(\varphi)$' algunas veces parece que dicen lo mismo, y otras, lo contrario. *Según la miramos*, la proposición '$\varphi(\varphi)$' parece decir unas veces $\sim \varphi(\varphi)$, y otras, lo contrario. Y, efectivamente, unas veces la vemos como el producto de la sustitución

$$\varphi(f) \mid^{f}_{\varphi}$$

y otras como

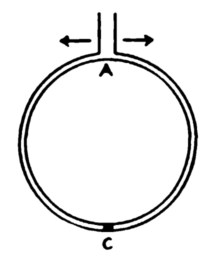
$$f(f) \mid^{f}_{\varphi}$$

Diríamos: «'heterológico' no es heterológico; así que, según la definición, puede llamárselo heterológico». Y suena muy bien, va perfectamente y no es necesario en absoluto que nos demos cuenta de la contradicción. Si reparamos en la contradicción, diremos, primero, que con el enunciado: ξ es heterológico, no queremos decir lo mismo en ambos casos. En una se trata de un enunciado completo, en otro, de uno abreviado según la definición.

Entonces queremos zafarnos del asunto diciendo: '$\sim \varphi(\varphi) = \varphi_1(\varphi)$'. Pero ¿por qué hemos de engañarnos así? Dos caminos *opuestos* conducen aquí a lo *mismo*.

O también: *es igualmente natural* en este caso decir '$\sim \varphi(\varphi)$' que decir '$\varphi(\varphi)$'.

Según la regla, es una expresión tan natural decir que C queda a la derecha del punto A, como decir que queda a la izquierda. Según la regla que dice que un lugar queda en la dirección



de la flecha si la calle que comienza en esa dirección conduce a él.

Contemplémoslo desde el punto de vista de los juegos de lenguaje.

Originariamente hemos jugado el juego sólo con calles rectas.

80. ¿Podría imaginarse, acaso, que cuando veo *azul* quiere decir que el objeto que veo no es *azul*, que el color que me aparece, siempre pasa por el que queda *excluido*? Podría creer, por ejemplo, que Dios me muestra siempre un color para decir: ése *no*.

O quizá suceda esto: El color que veo me dice sólo que ese color desempeña un papel en la descripción del objeto. No corresponde a una proposición, sino sólo a la palabra «azul». Y la descripción del objeto, por tanto, puede igualmente querer decir: «es azul», como «no es azul». Entonces decimos: el ojo sólo me muestra azules, pero no el papel de esos azules. –Comparamos el ver los colores con el oír la palabra «azul» cuando no hemos oído el *resto* de la proposición.

Quiero mostrar que uno puede verse llevado a describir el que algo sea azul tanto con las palabras, que es azul, cuanto con las de que no es azul.

Que, bajo mano, podríamos trastocar el método de proyección de modo que '*p*' y '$\sim p$' adquirieran el mismo sentido. Por cuyo motivo lo pierden, sin embargo, si no introduzco algo nuevo como negación.

Un juego de lenguaje puede perder su *sentido*, el carácter de juego de lenguaje, por una contradicción.

Y aquí es importante decir que no queda descrito ese carácter diciendo que los sonidos han de producir un cierto *efecto*. Pues el juego de lenguaje (2)[3] perdería el carácter de juego de lenguaje si, en lugar de las 4 órdenes, los albañiles profirieran siempre otros sonidos; aunque pudiera mostrarse, fisiológicamente por ejemplo,

[3] *Philosophische Untersuchungen*, 2; cfr. *infra*, VI, § 40n, p. 288. (*Nota de los editores*.)

que siempre son esos sonidos los que mueven al peón a traer los materiales que trae.

También aquí podría decirse que la observación de los juegos de lenguaje, efectivamente, cifra su importancia en que los juegos de lenguaje siempre funcionan. Que su importancia se cifra, por tanto, en que los seres humanos se dejan adiestrar para una reacción como ésa ante sonidos.

Me parece que esto tiene que ver con la cuestión de si una operación de cálculo es un experimento cuya finalidad sea predecir la marcha de los cálculos. Pues ¿y si alguien hace una operación y predice —correctamente— que la próxima vez se calculará de otro modo, pues las circunstancias habrán cambiado entonces, aunque nada más sea que porque la operación ya se haya hecho a menudo *de tal y tal modo*?

Calcular es un fenómeno que conocemos por el calcular. Igual que el lenguaje es un fenómeno que conocemos por nuestro lenguaje.

¿Puede decirse: «La contradicción es inocua cuando puede encapsulársela»? Pero ¿qué nos impide encapsularla? Que no conocemos bien el cálculo. *Este* es, pues, el mal. Y esto es lo que se piensa cuando se dice: la contradicción indica que hay algo en nuestro cálculo que no está en orden. Ella es meramente el *síntoma* local de una enfermedad de todo el cuerpo. Pero el cuerpo está enfermo sólo cuando no nos conocemos bien.

El cálculo padece una enfermedad secreta, significa: lo que tenemos ante nosotros no es, tal como es, un cálculo, y *nosotros no conocemos bien* el caso, es decir, no podemos indicar ningún cálculo que corresponda 'en lo esencial' a ese simulacro de cálculo y excluya en él sólo lo malo.

Pero ¿cómo es posible no conocer bien un cálculo; no está ahí, claro, ante nosotros?

Pensemos en el cálculo fregeano y en la contradicción que en él se enseña. Pero no de modo que se presente ésta como algo enfermizo. Se trata, más bien, de una parte reconocida del cálculo, se calcula con ella. (Las operaciones de cálculo no sirven al objetivo usual de las operaciones lógicas de cálculo.) Ahora se impone la tarea de transformar ese cálculo, del que la contradicción es una parte enteramente respetable, en otro, en el que no haya de darse esa contradicción, puesto que el cálculo se quiere emplear ahora para fines que hacen de la contradicción algo indeseable.—¿Qué clase de tarea es ésta? Y ¿qué clase de incapacidad es ésta, cuando decimos: «No hemos encontrado aún un cálculo que satisfaga esa condición»?

Con: «no conozco bien el cálculo» no me refiero a un estado anímico, sino a una incapacidad de *hacer* algo.

Para la clarificación de un problema filosófico es muy útil, a menudo, imaginarse el desarrollo histórico, de la matemática por ejemplo, de modo completamente diferente a como sucedió de hecho. Si hubiera sido diferente, a nadie se le hubiera ocurrido decir lo que efectivamente dice.

Quiero preguntar algo como: «¿Persigues utilidad con tu cálculo?»; entonces no encontrarás contradicción alguna. Y si no persigues utilidad, entonces no importa, en definitiva, que encuentres una.»

81. Nuestra tarea no es descubrir cálculos, sino descubrir la situación *presente*.

La idea del predicado que vale de sí mismo, etc., se funda, verdaderamente, en *ejemplos*, pero esos ejemplos eran *estupideces*.

no fueron concebidos en absoluto. ¡Pero esto no significa que tales predicados no pudieran aplicarse, y que la contradicción no tuviera entonces su aplicación!

Quiero decir: si se pone la mirada realmente en la aplicación, a nadie se le ocurre escribir '$f(f)$'. Por otra parte, cuando en el cálculo los signos se usan, por así decirlo, *sin presuposiciones*, puede escribirse también '$f(f)$', y han de sacarse entonces las consecuencias, y no conviene olvidarse de que no hay aún *viso* alguno de una eventual aplicación práctica de ese cálculo.

¿Es ésta la cuestión: «¿Dónde hemos abandonado el campo de la utilidad?»?

¿No sería posible, entonces, que *deseáramos* producir una contradicción? ¿Que, con el orgullo de un descubrimiento matemático, dijéramos: «Mirad, asi generamos una contradicción»? ¿No sería posible que mucha gente hubiera intentado, por ejemplo, producir una contradicción en el campo de la lógica, y que *uno* lo hubiera conseguido finalmente?

Pero ¿por qué había de intentar *eso* la gente? Bien, quizá yo no pueda ahora indicar la razón más plausible. Pero ¿por qué no, por ejemplo, para mostrar que todo en este mundo es incierto?

Es verdad, entonces, que esas gentes nunca usarían realmente expresiones de la forma '$f(f)$', pero estarían contentas de vivir en la *vecindad* de una contradicción.

«¿Veo un *orden* que me impide llegar de improviso a una contradicción?» Esto es como si yo dijera: Muéstrame un orden en mi cálculo, que me convenza de que de ese modo nunca podré llegar a un número, tal que... Y entonces le muestro, por ejemplo, una demostración recursiva.

Pero ¿es falso decir: «Bien, yo sigo mi camino. Si *veo* una contradicción, entonces es el momento de hacer algo.»?—¿Signifi-

ca esto: no hacer matemática realmente? ¿Por qué *no* ha de ser esto calcular? Continúo tranquilamente ese camino; si llegara a un precipicio intentaría dar la vuelta. ¿No es esto 'caminar'?

Imaginemos el caso siguiente: Las gentes de una tribu determinada sólo pueden calcular oralmente. Todavía no conocen la escritura. Enseñan a sus hijos a contar en el sistema decimal. Entre ellos son muy frecuentes los errores al contar, hay números que se repiten o se dejan, sin que ellos lo noten. Pero un viajero graba fonográficamente su modo de contar. Les enseña la escritura y a calcular por escrito y les muestra, entonces, cuán a menudo se equivocan al calcular sólo oralmente.—¿Han de admitir esas gentes, ahora, que antes no calculaban propiamente? ¿Que sólo andaban a tientas, mientras que ahora caminan? ¿No podrían, incluso, decir: que antes les iban mejor las cosas, que su intuición no tenía que cargar con el material muerto de la escritura? Con máquinas no puede atraparse el espíritu. Dicen, por ejemplo: «Si, como afirma tu máquina, antes repetíamos cifras, seguramente estaba bien como estaba.»

Confiamos más, por ejemplo, en los medios 'mecánicos' de cálculo que en nuestra memoria. ¿Por qué?—¿Tiene que ser así? Puede que me haya confundido al calcular, pero la máquina, construida por nosotros de tal y tal modo, no puede haberse confundido. ¿He de adoptar este punto de vista?—«Bueno, la experiencia nos ha enseñado que el cálculo con máquina es más fiable que el de memoria. Nos ha enseñado que nuestra vida transcurre más fácilmente si calculamos con máquinas.» Pero ¿tiene que ser lo fácil necesariamente nuestro ideal (ha de ser nuestro ideal que todo venga envuelto en papel de celofán)?

¿No podría yo también confiar en la memoria y no en la máquina? Y ¿no podría yo desconfiar de la *experiencia* que me 'produce la ilusión' de que la máquina es más fiable?

82. Antes no estaba yo seguro de que entre las maneras de multiplicar que corresponden a *esta* descripción no hay ninguna

que proporcione otro resultado diferente al aceptado. Supongamos, sin embargo, que mi inseguridad sea tal que sólo comienza a una cierta distancia del modo normal de calcular; y supongamos que dijéramos: ahí no importa; puesto que si calculo de modo muy anormal, tengo que volver a pensarme las cosas una vez más. ¿No estaría eso bien?

Quiero preguntar: ¿Una prueba de consistencia (o de no-ambigüedad) *tiene que* proporcionarme necesariamente una certidumbre mayor que la que tengo sin ella? Y si busco aventuras ¿no puedo, entonces, buscar aquellas en las que esa prueba no me ofrezca ya certidumbre alguna?

Mi propósito es cambiar la *actitud* frente a la contradicción y frente a la prueba de consistencia. (*No*, mostrar que esta prueba me muestra algo sin importancia. ¡Cómo *podría*, además, ser así!)

Si yo estuviera empeñado, por ejemplo, en producir contradicciones con fines estéticos, digamos, entonces aceptaría sin reparos la prueba inductiva de consistencia y diría: carece de toda esperanza el querer producir en este cálculo una contradicción; la prueba te muestra que eso no funciona. (Prueba en la teoría de la armonía.)

83. Es una buena expresión decir: «Este cálculo no conoce ese orden (ese método), éste sí.»

¿Y si alguien dijera: «Un cálculo que no conozca ese orden no es propiamente un cálculo»?

(Un negociado que no conozca ese orden no es propiamente un negociado.)

El desorden —yo diría— se evita por motivos prácticos, no teóricos.

Se introduce un orden porque sin él se han tenido malas experiencias —o también, se introduce como la forma aerodinámica en coches de niño y lámparas, porque ha dado pruebas de su eficacia en algo diferente y se ha convertido por ello en el estilo o la moda imperante.

El mal uso de la idea del dispositivo *mecánico* de seguridad frente a la contradicción. Pero ¿qué, si las partes del mecanismo se funden unas con otras, se rompen o doblan?

84. «Sólo la prueba de consistencia me muestra que puedo fiarme del cálculo.»

¿Qué clase de proposición es ésta: Sólo *entonces* puedes fiarte del cálculo? ¿¡Y si te fías de él, ahora, *sin* ninguna prueba!? ¿Qué clase de error has cometido?

Pongo orden; digo: «Sólo hay *estas* posibilidades:...». Es como si determinara las posibles permutaciones de los elementos A, B, C: antes de que ahí hubiera orden yo sólo tenía una idea nebulosa de ese conjunto.—¿Estoy seguro ahora de que no he pasado nada por alto? El orden es un medio de no pasar nada por alto. Pero: ¿de no pasar por alto ninguna posibilidad en el cálculo, o: de no pasar por alto ninguna posibilidad en la realidad?—¿Es seguro, ahora, que la gente nunca querrá calcular de otro modo? ¿Que la gente nunca considerará nuestro cálculo como nosotros el contar de los salvajes, cuyos números sólo llegan hasta cinco?—¿Que nunca querremos contemplar la realidad *de otro modo*? Pero *ésta* no es en absoluto la certidumbre que ha de proporcionarnos ese orden. No es la eterna corrección del cálculo lo que hay que asegurar, sino sólo la temporal, por así decirlo.

«¡Te *refieres* seguramente a esas posibilidades!—¿O te refieres a otras?»

El orden me convence de que con esas 6 posibilidades no he pasado por alto ninguna. Pero ¿me convence también de que nada podrá quebrantar mi actual concepción de tales posibilidades?

85. ¿Podría imaginarme que alguien recelara tanto ante una posibilidad de construcción del heptágono como ante la construcción de una contradicción, y que la demostración de que la construcción del heptágono es imposible tuviera un efecto tranquilizante, como la prueba de consistencia?

¿Cómo es que estamos tentados en general (o cerca de estarlo) a abreviar $(3-3)\times 2=(3-3)\times 5$ dividiéndolo por $(3-3)$? ¿Cómo es que este paso parece plausible según las reglas y luego resulta inaplicable, sin embargo?

Si quiere describirse esta situación, es enormemente fácil cometer un fallo en la descripción. (Es, pues, muy difícil de describir.) Las descripciones que nos llegan inmediatamente a la boca son equívocas, así está dispuesto nuestro lenguaje en este campo.

Siempre se caerá ahí de la descripción a la explicación.

Era, o parecía, *aproximadamente* así: Tenemos un cálculo, digamos, con las cuentas de un ábaco; lo cambiamos por un cálculo con signos escritos; este cálculo nos sugiere un desarrollo del método de calcular que no nos sugirió el primer cálculo — o quizá mejor: el segundo cálculo *borra* una diferencia que no podía pasarse por alto en el primero. Y bien, si la gracia del primer cálculo era que en él se hacía esa diferencia, y en el segundo no se hace, entonces éste ha perdido, con ello, su capacidad de ser usado como equivalente del primero. Y ahora podría surgir la cuestión —así parece—: *¿dónde* nos hemos alejado del cálculo originario, qué límites corresponden en el nuevo a los límites naturales del viejo?

Tengo un sistema de reglas de cálculo que fueron modeladas según las de otro cálculo. Lo tomé como modelo. Pero lo he sobrepasado. Esto fue, incluso, una ventaja; pero ahora el nuevo cálculo resulta inaplicable en ciertos puntos (al menos para los viejos fines). Así que intento cambiarlo: es decir, sustituirlo por otro *hasta cierto punto* diferente. A saber, por otro que goce de las ventajas del nuevo sin sus inconvenientes. Pero ¿es ésta una tarea claramente *determinada*?

¿Existe —podría también preguntarse— *el* cálculo lógico *correcto*, sólo sin las contradicciones?

¿Podría decirse, por ejemplo, que, si bien es verdad que la «Theory of Types» de Russell elude la contradicción, el cálculo de Russell, sin embargo, no es el cálculo lógico general, sino, digamos, uno artificialmente restringido, mutilado? ¿Podría decirse que el cálculo lógico *puro*, *general*, hay que encontrarlo todavía?

Yo estaba jugando un juego y, al hacerlo, seguía ciertas reglas: pero *cómo* las seguía, es cosa que dependía de las circunstancias. y esa dependencia no estaba fijada por escrito. (Esta es una exposición en cierta medida engañosa.) Quise luego jugar ese juego de modo que procediera siguiendo 'mecánicamente' reglas, y 'formalicé' el juego. Pero, al hacerlo, llegué a puntos donde el juego perdía *toda* su gracia; por eso, quise evitarlos 'mecánicamente'.—La formalización de la lógica no había conseguido la satisfacción. Pero ¿para qué se había intentado siquiera? (¿Para qué era útil?) ¿No correspondía esta necesidad, y la idea de que había de poderse satisfacer, a una falta de claridad en otro punto?

La pregunta «¿para qué era útil?» era una pregunta absolutamente *esencial*. Puesto que el cálculo no se había inventado con una finalidad práctica, sino para 'fundamentar la aritmética'. Pero ¿quién dice que la aritmética sea lógica; o lo que hay que hacer con la lógica para que sirva en algún sentido de infraestructura de la aritmética? Si consideraciones estéticas, por ejemplo, nos llevaran a intentar eso ¿quién dice que podríamos conseguirlo? (¡¿Quién dice que este poema inglés puede traducirse a nuestra satisfacción al alemán?!)

(*Aunque* esté claro que para cada proposición inglesa hay, en *algún* sentido, una traducción al alemán.)

La insatisfacción filosófica desaparece cuando vemos *más*.
El tipo de cálculo pierde su gracia cuando permito la reducción mediante (3 – 3). Pero ¿qué, si yo introdujera, por ejemplo, un nuevo signo de igualdad que hubiera de expresar: 'igual después de *esta* operación'? ¿Tendría sentido decir: «Ganado en *este* sentido», si gano en ese sentido *cualquier* juego?

El cálculo me indujo en ciertos puntos a la abrogación de él mismo. Quiero ahora un cálculo que no haga eso y que excluya esos puntos.—Pero ¿significa esto ahora que cualquier cálculo, en el que no se produzca una exclusión tal, es un cálculo incierto? «Bueno, el descubrimiento de esos puntos fue una advertencia para nosotros.»—Pero ¿no has *malentendido* esa 'advertencia'?

86. ¿Puede probarse que no se ha pasado por alto nada? Ciertamente. Y ¿no hay que admitir, quizá, más tarde: «Sí, he pasado algo por alto; pero no en el ámbito en el que valía mi prueba»?

La prueba de consistencia ha de proporcionarnos motivos para una predicción; y esto es su *finalidad práctica*. Esto no quiere decir que esta prueba sea una prueba sacada de la física de nuestra técnica de cálculo; es decir, una prueba de la matemática aplicada, pero sí que es una predicción la aplicación más cercana a nosotros y aquella por cuya causa nos importa esa prueba. La predicción no es: «*de este modo* no se producirá desorden alguno» (pues esto no sería una predicción: es la proposición matemática), sino «no se producirá desorden alguno».

Quería decir: La prueba de consistencia sólo puede *tranquilizarnos* cuando es una razón concluyente para esa predicción.

87. Donde me es suficiente que se demuestre que una contradicción o una trisección del ángulo no pueden construirse de *este* modo, allí logra la prueba inductiva lo que se exige de ella. Pero si hubiera de temer que algo alguna vez pudiera ser interpretado como construcción de una contradicción, entonces ninguna prueba puede quitarme ese vago temor.

La cerca que pongo en torno a la contradicción no es una supercerca.

¿Cómo podría el cálculo, mediante una prueba, llegar a un orden fundamental?

¿Cómo podría ser un cálculo auténtico mientras no se hubiera encontrado esa prueba?

«Este cálculo es puramente matematico; una máquina podría realizarlo.» ¿Qué clase de máquina? ¿Una construida con materiales corrientes, o una supermáquina? ¿No confundes la dureza de una regla con la dureza de un material?

Veremos la contradicción a otra luz completamente diferente si consideramos su aparición y sus consecuencias antropológicamente, por así decirlo, que si la miramos desde la exasperación matemática. Es decir, la veremos de otro modo si intentamos nada más *describir* cómo la contradicción influye en los juegos de lenguaje; que si la miramos desde el punto de vista del legislador matemático.

•

88. Pero ¡alto! ¿No está claro que nadie quiere llegar a una contradicción? ¿Que aquél, pues, ante cuyos ojos pones la posibilidad de una contradicción, hará todo para imposibilitarla? (Que quien no hace eso, pues, es un manta.)

Pero ¿y si él respondiera: «No puedo imaginarme una contradicción en mi cálculo.—Me has mostrado, en verdad, una contradicción en otro, pero no en *éste*. En éste *no hay ninguna*, y tampoco veo la posibilidad.»

«Si alguna vez cambiara mi concepción del cálculo; si, por algún contexto que ahora no aprecio, cambiara su aspecto, entonces seguiremos hablando.»

«*No* veo la posibilidad de una contradicción. Tan poco como tú —al parecer— la posibilidad de que en tu prueba de consistencia haya una.»

¿Sé si me parecerá peligrosa una contradicción en el caso de que alguna vez viera una allí donde no veo ahora la posibilidad de ninguna?

89. «¿Qué me enseña una prueba, a parte de su resultado?»—¿Qué me enseña una nueva melodía? ¿No estoy tentado a decir que me *enseña* algo?

90. No he aclarado todavía el papel del equivocarse en el cálculo. El papel de la proposición: «He debido equivocarme». Ese papel es la clave de la compresión de los 'fundamentos' de la matemática.

PARTE IV
1942-1944

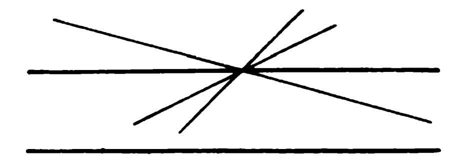
1. «Los axiomas de un sistema matemático de axiomas conviene que sean evidentes.» ¿Cómo se evidencian?

Y si yo dijera: *así* es como me resulta más fácil imaginarlo.

Y aquí imaginar no es un proceso anímico determinado, en el que la mayoría de las veces se cierran los ojos o se cubren con las manos.

2. ¿Qué decimos cuando se nos ofrece un axioma como el de las paralelas, por ejemplo? ¿Nos ha mostrado la experiencia que las cosas se comportan así? Bueno, quizá; pero *¿qué* experiencia? Quiero decir: la experiencia desempeña un papel; pero no el que sería de esperar inmediatamente. Puesto que no se han hecho experimentos, ni se ha encontrado que realmente sólo *una* recta de las trazadas por un punto dado no corte a otra. Y, sin embargo, la proposición es evidente.—Si ahora dijera: es totalmente indiferente por qué es evidente. Basta: lo aceptamos. Lo único importante es cómo lo usamos.

La proposición describe una imagen. A saber:



Esta imagen nos resulta aceptable. Como nos resulta aceptable indicar nuestro conocimiento aproximado de un número, redondeándolo en un múltiplo de 10.

'Aceptamos esta proposición.' Pero ¿cómo *que* la aceptamos?

3. Quiero decir: cuando está dado el texto del axioma de las paralelas, por ejemplo (y entendemos el lenguaje), aún no está determinado en absoluto el modo de aplicación de esa proposición, ni su sentido, por tanto. Y si decimos que nos resulta evidente, ya hemos elegido, entonces, sin saberlo, un modo determinado de aplicación de la proposición. La proposición no es un axioma matemático si no la empleamos específicamente *para ello.*

El hecho de que no hagamos aquí experimentos, sino que aceptemos la evidencia, establece ya el uso. Pues no somos tan ingenuos de dejar que valga la evidencia en lugar del experimento.

No el que nos resulte evidentemente verdadera, sino el que dejemos valer la evidencia, es lo que la convierte en una proposición matemática.

4. ¿Nos enseña la experiencia que entre 2 puntos siempre es posible una recta? ¿O que dos colores diferentes no pueden estar en un lugar?

Podría decirse: la *imaginación* nos lo enseña. Y ahí reside la verdad; sólo hay que entenderlo correctamente.

Antes de la proposición el concepto es todavía flexible.

Pero ¿no podrían determinarnos ciertas experiencias a rechazar el axioma? Sí. Y, sin embargo, éste no desempeña el papel de una proposición de experiencia.

¿Por qué las leyes newtonianas no son axiomas de la matemática? Porque podría uno imaginarse perfectamente que las cosas sucedieran de otro modo. Pero —quiero decir— esto asigna a aquellas proposiciones un papel determinado sólo en contraposición a otra. O sea: decir de una proposición: 'Uno podría imaginarse eso de otro modo' o 'Uno podría imaginarse también lo contrario de ello', le adscribe el papel de una proposición de experiencia.

La proposición que no se puede imaginar sino verdadera tiene otra *función* que aquella para la que las cosas no se comportan así.

5. Los axiomas matemáticos funcionan de tal modo que si la experiencia nos llevara a abandonar un axioma, no por ello se convertiría en axioma su contrario.

'$2 \times 2 \neq 5$' no significa que
'$2 \times 2 = 5$' no se haya acreditado.

Podría colocarse delante de los axiomas, por así decirlo, un signo especial de afirmación.

Algo no es axioma *porque* lo aceptemos como muy probable, como cierto, incluso, sino porque le asignamos una función determinada, y una opuesta a la de la proposición empírica.

Concedemos al axioma otro tipo de reconocimiento que a la proposición empírica. Y con ello no quiero decir que el 'acto anímico del reconocimiento' sea otro.

El axioma es, diría yo, otra parte de la oración.

6. Cuando se escucha el axioma matemático de que tal y tal cosa es posible, se supone, sin más, que se sabe lo que aquí significa 'ser posible'; porque esa forma proposicional nos es naturalmente familiar.

¡Uno no se da cuenta de lo variopinto del uso del enunciado «...es posible»! Y no se le ocurre preguntar por el uso especial en este caso.

Sin tener una perspectiva del uso hasta en sus menores detalles, no podemos dudar aquí en absoluto de que entendamos la proposición.

¿Es del género de las proposiciones matemáticas la proposición que dice que no hay acción a distancia? También gustaría decir aquí: la proposición no está determinada para expresar una experiencia, sino que uno no podría imaginarse algo de otro modo.

Decir que entre dos puntos siempre es (geométricamente) posible una recta, significa: la proposición «los puntos... están sobre una recta» es un enunciado sobre la posición de puntos sólo cuando trata de más de 2 puntos.

Igual que uno tampoco se pregunta qué significa en un caso especial una proposición de la forma «No hay ningún...» (por

ejemplo, «No hay ninguna prueba de esta proposición»). A la pregunta de qué significa se contesta al otro y a sí mismo con un ejemplo de no-existencia.

7. La proposición matemática se apoya en cuatro pies, no tres; está superdeterminada.

8. Cuando describimos mediante una regla el obrar de una persona, por ejemplo, pretendemos que aquel a quien hacemos la descripción sepa, aplicando la regla, lo que sucede en un caso particular. ¿Le doy, pues, mediante la regla, una descripción *indirecta*?

Hay, naturalmente, una proposición que dice: si alguien intenta multiplicar según tal y tal regla los números..., obtiene...

Una aplicación de la proposición matemática ha de ser siempre el calcular mismo. Esto convierte la situación de la actividad de cálculo en sentido de las proposiciones matemáticas.

Juzgamos la igualdad y la coincidencia según los resultados de nuestro cálculo, por eso no podemos explicar el cálculo con ayuda de la coincidencia.

Describimos con ayuda de la regla. ¿Para qué? ¿Por qué? Esto es otra cuestión.

'La regla, aplicada a estos números, da aquéllos' podría significar: la expresión de la regla, aplicada a un ser humano, le permite generar aquellos números a partir de éstos.

Se siente perfectamente que esto *no* sería una proposición matemática.

La proposición matemática determina un camino; nos fija un camino.

No es una contradicción que ella sea una regla, y no estipulada simplemente, sino producida según reglas.

Quien describe mediante una regla, él mismo no sabe más que lo que dice. O sea, tampoco él ve de antemano la aplicación que hará de la regla en un caso particular. Quien dice «y así sucesivamente», tampoco él mismo sabe más que «y así sucesivamente».

9. ¿Cómo podría explicarse a alguien lo que ha de hacer quien tiene que seguir una regla?

Uno se ve tentado a explicar: ante todo haz *lo más sencillo* (cuando la regla, por ejemplo, es repetir siempre lo mismo). Y algo hay ahí, naturalmente. Es significativo que podamos decir que es más sencillo escribir una secuencia de números, en la que cada número sea igual que el predecesor, que una secuencia en la que cada número sea una unidad mayor que el predecesor; y también que esto es una ley más sencilla que el sumar 1 y 2 alternativamente.

10. ¿No resulta precipitado aplicar a longitudes de onda de luz una proposición que se ha experimentado con varillas y habichuelas? Quiero decir: que $2 \times 5.000 = 10.000$.

¿Se cuenta realmente con que lo que se ha conformado en tantos casos tiene que valer también para éstos? ¿O no resulta, más bien, que no nos hemos comprometido todavía *en absoluto* con el supuesto matemático?

11. La aritmética como historia natural (mineralogía) de los números. Pero *¿quién* habla así de ella? Todo nuestro pensar está penetrado de esa idea.

Los números son configuraciones (no me refiero a los signos numéricos) y la aritmética nos manifiesta las propiedades de esas configuraciones. Pero la dificultad está en que esas propiedades de las configuraciones son *posibilidades;* y no propiedades configurativas de las cosas de tal configuración. Y estas posibilidades se revelan como posibilidades físicas o psicológicas (de separación, composición, etc.). Las configuraciones, sin embargo, desempeñan sólo el papel de las imágenes que se usan de tal y tal modo. No son propiedades de configuraciones lo que damos, sino transformaciones de configuraciones, erigidas en paradigmas de cualquier tipo.

12. No juzgamos imágenes, sino mediante imágenes. No son ellas lo que investigamos, sino, mediante ellas, algo diferente.

Le llevas a decidirse a aceptar esa imagen. Y lo haces mediante una demostración, esto es, mediante la exhibición de una serie de imágenes, o simplemente mostrándole la imagen. Aquí es indiferente lo que mueva a esa decisión. Lo importante es que se trata de la aceptación de una imagen.

La imagen del combinar no es combinar alguno; la imagen del separar no es separar alguno; la imagen del ajuste, ningún ajuste. Y, sin embargo, esas imágenes son de la mayor importancia. *Así aparecen las cosas* cuando se combina; cuando se separa; etc.

13. ¿Qué sucedería si los animales o los cristales poseyeran propiedades tan hermosas como los números? Habría, por ejemplo, una serie de configuraciones, una siempre mayor en una unidad a la otra.

Me gustaría poder exponer cómo es que a veces la matemática nos aparece como historia natural del dominio del número, y, a veces, como una colección de reglas.

Pero ¿no podría estudiarse transformaciones de formas de animales (por ejemplo)? Pero *¿cómo* 'estudiar'? Quiero decir: ¿no podría ser provechoso pasar revista a transformaciones de formas animales? Y, sin embargo, esto no sería una rama de la zoología.

Entonces, una proposición matemática sería (por ejemplo) que *esta* transformación hace derivar *esta* forma de *esta* otra. (Las formas y la transformación recognoscibles.)

14. Pero hemos de recordar que la demostración matemática demuestra por sus transformaciones no sólo proposiciones de signos geométricos, sino proposiciones del más variado *contenido*.
Así, la transformación de una demostración russelliana demuestra que esta proposición lógica puede formarse con ayuda de estas reglas a partir de las leyes fundamentales. Pero a la demostración se le considera demostración de la verdad de la conclusión, o demostración de que la conclusión no dice *nada*.
Y esto es posible sólo por una relación de la proposición con algo externo; es decir, por su relación con otras proposiciones, por ejemplo, y con su aplicación.

«La tautología ('$p \vee \sim p$', por ejemplo) no dice nada» es una proposición que remite al juego de lenguaje en el que se aplica la proposición *p*. (Por ejemplo, «Llueve o no llueve» no es una manifestación sobre el tiempo.)

La lógica russelliana no dice nada respecto al tipo y empleo de *proposiciones*, no me refiero a proposiciones *lógicas*.—Y, sin embargo, la lógica adquiere todo su sentido sólo de su supuesta aplicación a proposiciones.

15. Puede uno imaginarse que haya gentes que tengan una matemática aplicada sin una matemática pura. Pueden, por ejemplo —supongamos—, calcular el trayecto que describen ciertos cuerpos móviles y predecir su situación en un tiempo dado. Para ello utilizan un sistema de coordenadas, las ecuaciones de curvas (*una forma de descripción de movimiento real*) y la técnica del cálculo en el sistema decimal. Puede que la idea de una proposición de la matemática pura les resulte del todo extraña.

Esas gentes tienen, pues, reglas, de acuerdo a las cuales transforman los signos respectivos (en particular signos numéricos, por ejemplo) con la finalidad de predecir la ocurrencia de ciertos acontecimientos.

Pero si ahora, por ejemplo, multiplican, ¿no conseguirán así una proposición, cuyo contenido sea que el resultado de la multiplicación es el mismo si se permutan los factores? Esto no será una regla primaria de signos, pero tampoco una proposición de su física.

Bueno, no *necesitan* conseguir una proposición así, aunque permitan la permuta de los factores.

Me imagino el asunto de modo que esa matemática se ejercite totalmente en forma de *órdenes*. «Tienes que hacer *esto y esto*», para obtener, digamos, la respuesta a '¿dónde se encontrará este cuerpo en tal y tal tiempo?' (Es del todo indiferente cómo han llegado esas personas a ese método de predicción.)

Para esas personas el centro de gravedad de su matemática está *plenamente* en la *acción*.

16. Pero ¿es esto posible? ¿Es posible que no pronuncien como *proposición* la ley conmutativa, por ejemplo?

Pero yo diría: esas gentes no tienen por qué llegar a la

conclusión de que hacen descubrimientos matemáticos, sino *sólo* descubrimientos físicos.

Pregunta: ¿Tienen que hacer descubrimientos matemáticos en tanto que descubrimientos? ¿Qué les falta si no los hacen? ¿Podrían usar, por ejemplo, la demostración de la ley conmutativa, pero sin la concepción de que culmina en una *proposición*, de que tiene, pues, un resultado que de algún modo es comparable a sus proposiciones físicas?

17. Simplemente esta imagen

0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0

vista, bien como 4 filas de 5 puntos, bien como 5 columnas de 4 puntos, podría convencer a alguien de la ley conmutativa. Y, a continuación, él podría ya realizar multiplicaciones, bien en una dirección o bien en la otra.

Una mirada al modelo y a las piezas le convence de que con ellas podrá componer la figura, es decir, él *emprende* acto seguido la tarea de colocarlas.

«Sí, pero sólo si las piezas no cambian.»—Si ellas no cambian y nosotros no cometemos alguna falta inconcebible, o no hay piezas que inadvertidamente desaparezcan o vengan a añadirse.

«Pero ¡es esencial que la figura pueda componerse siempre efectivamente con las piezas! ¿Qué sucedería si no pudiera?» Quizá nos considerásemos, entonces, un tanto trastocados. Pero, ¿y qué más?—Quizá también aceptáramos el asunto tal como

es. Y Frege podría decir, entonces: «¡He ahí un nuevo tipo de locura!»[1].

18. Es claro que la matemática, como técnica de transformación de signos para hacer predicciones, no tiene nada que ver con la gramática.

19. Las gentes, cuya matemática sólo es una técnica así, conviene que acepten también demostraciones que les convenzan de la sustituibilidad de una técnica de signos por otra. Es decir, encuentran transformaciones, series de imágenes, que les permiten aventurarse a usar una técnica en vez de otra.

20. Si el cálculo nos aparece como una actividad maquinal, entonces la máquina es el *ser humano* que realiza el cálculo.

La operación de cálculo sería, entonces, por así decirlo, un diagrama que representa una parte de la máquina.

21. Y esto me lleva al hecho de que una imagen puede muy bien convencernos de que una determinada parte de un mecanismo se moverá de tal y tal modo cuando se ponga el mecanismo en marcha.

Una imagen (o una serie de imágenes) tal, actúa como una demostración. Así yo podría construir, por ejemplo, cómo se moverá

el punto X del mecanismo.

[1] Cfr. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Prólogo, p. XVI. Cfr. también *supra*, p. 70. (*Nota de los editores.*)

¿No es *extraño* que no esté claro instantáneamente *cómo* la imagen del período en la división nos convence de la recurrencia de serie de cifras?

(Es tan difícil para mí separar la relación interna de la externa, y la imagen, de la predicción.)

El carácter dúplice de la proposición matemática, como *ley* y como *regla*.

22. ¿Qué, si en lugar de «intuición» se dijera «conjetura correcta»? Esto mostraría el valor de una intuición a otra luz completamente diferente. Pues el fenómeno del conjeturar es un fenómeno psicológico, pero no el de conjeturar correctamente.

23. El que hayamos aprendido la técnica hace que ahora, a la vista de esa imagen, la modifiquemos de tal y tal modo.

'Nos decidimos por un nuevo juego de lenguaje.'
'Nos decidimos *espontáneamente*' (yo diría) 'por un nuevo juego de lenguaje.'

24. Sí; parece que si nuestra memoria funcionara de otro modo, entonces no podríamos calcular como lo hacemos. Pero ¿podríamos, entonces, dar definiciones de cómo lo hacemos; escribir y hablar tal como lo hacemos?
Pero ¡¿cómo describir mediante proposiciones empíricas los fundamentos de nuestro lenguaje?!

25. Supongamos que una división, una vez acabada, no llevara al mismo resultado que la copia de su período. Esto podría suceder, por ejemplo, porque hemos cambiado las leyes de

cálculo, sin darnos cuenta de ello. (Aunque también podría provenir de que copiamos de otro modo.)

26. ¿Cuál es la diferencia entre *no* calcular y calcular *falsamente*?—¿O hay un límite claro entre *no* medir el tiempo y medirlo *falsamente*? ¿No conocer una medida del tiempo y conocer una falsa?

27. Fíjate en el palabreo con el que convencemos a alguien de la verdad de una proposición matemática. Proporciona una explicación de la función de esa convicción. Me refiero al palabreo con el que despierta la intuición.

Con el que se pone en marcha la maquinaria de una técnica de cálculo.

28. ¿Puede decirse que quien aprende una técnica se convence, así, de la paridad de sus resultados?

29. El límite de la empiria[2] es la *formación de conceptos.*

¿Qué clase de transición hago entre «será así» y «*tiene que* ser así»? Formo un concepto diferente. Uno en el que se incluye lo que antes no estaba. Cuando digo: «Si estas derivaciones son iguales, entonces *tiene que*...», hago de algo un criterio de igualdad. Transformo, pues, mi criterio de igualdad.

Pero ¿y si alguien dice ahora: «No soy consciente de esos dos procesos, sólo soy consciente de la empiria, no de una formación y transformación de conceptos con independencia de ella, me parece que todo está al servicio de la empiria»?

---

[2] Cfr. p. 163. (*Nota de los editores.*)

Con otras palabras: no parece que nos volvamos menos racionales, unas veces, y más, otras; o que cambiemos nuestra forma de pensar, de modo que se altere *aquello que llamamos «pensar»*. Parece sólo que siempre acomodamos nuestro pensar a la experiencia.

Esto es claro: que cuando alguien dice: «Si sigues la *regla*, eso *tiene que* ser así», no tiene un concepto *claro* de experiencias que correspondan a lo contrario.

O también así: no tiene un concepto claro de qué aspecto tendría eso, si fuera de otro modo. Y esto es muy importante.

30. ¿Qué nos compele a formar el concepto de igualdad *de tal modo* que digamos, por ejemplo: «Si ambas veces haces realmente lo mismo, ha de resultar también lo mismo»?—¿Qué nos compele a proceder de acuerdo a una regla, a concebir algo como regla? ¿Qué nos compele a hablar con nosotros mismos en las formas del lenguaje que hemos aprendido?

Pues la expresión «tener que» manifiesta, ciertamente, que no podemos eludir *ese* concepto. (¿O he de decir «queremos»?)

Sí, aunque haya pasado de una formación conceptual a otra, el viejo concepto permanece aún en el trasfondo.

¿Puedo decir: «Una demostración nos lleva a una cierta decisión, a saber, a la de aceptar una formación conceptual determinada»?

No mires la demostración como un fenómeno que te *compele*, sino que te *guía*.—Y lo que guía es tu *concepción* de un (determinado) estado de cosas.

Pero ¿cómo es que guía a *cada uno* de nosotros de tal modo que coincidimos en la influencia que tiene sobre nosotros? Bien ¿cómo es que coincidimos al *contar*? «Así estamos adiestrados, precisamente», puede decirse, «y la coincidencia que así se produce, prosigue a través de las demostraciones».

En el curso de esa demostración hemos formado un modo de ver la trisección del ángulo, que excluye una construcción con regla y compás.

Por el hecho de aceptar una proposición como evidente, la absolvemos de toda responsabilidad frente a la experiencia.

En el curso de la demostración cambia nuestra mirada, y no le perjudica a aquella que esto tenga que ver con la experiencia.

Nuestra mirada es remodelada.

31. Eso tiene que ser así, no significa, eso será así. Al contrario: 'eso será así' elige una posibilidad entre otras. 'Eso tiene que ser así' ve nada más *una* posibilidad.

La demostración dirige nuestras experiencias, por así decirlo, dentro de canales determinados. Quien ha vuelto a intentar siempre esto y esto, tras la demostración abandona el intento.

Alguien intenta componer con piezas una figura determinada. Ve entonces un modelo en el que aparece una *parte* de aquella figura, compuesta con todas sus piezas, y abandona su intento. El modelo fue la *demostración* de que su proyecto es imposible.

También ese modelo, igual que el que le muestra que podrá componer una figura con esas piezas, cambia su *concepto*. Puesto que él, podría decirse, nunca ha contemplado todavía así la tarea de la composición de una figura con piezas.

¿No se ha dicho ya que uno que ve que con esas piezas puede construirse una parte de la figura, comprende que de ningún modo podrá construirse con ellas la imagen entera? ¿No es posible que intente e intente, a ver si no hay, a pesar de todo, una posición de las piezas que consiga ese fin? y ¿no es posible que él consiga su fin? (Doble uso de una pieza, por ejemplo.)

¿No hay que distinguir aquí entre pensar y el éxito práctico del pensar?

32. «...quienes no captan inmediatamente, como nosotros, ciertas verdades, sino que probablemente están constreñidos al fastidioso camino de la inducción», dice Frege[3]. Pero lo que a mí me interesa es la captación inmediata, si lo es de una verdad o de una falsedad. Pregunto: ¿cuál es la conducta característica de personas que 'captan inmediatamente' algo —sea cual sea el éxito práctico de esa captación?

No me interesa la captación inmediata de una verdad, sino el fenómeno de la captación inmediata. No (en verdad) como un fenómeno anímico especial, sino como un fenómeno de la acción humana.

33. Sí; es como si la formación de conceptos dirigiera nuestra experiencia dentro de canales determinados, de modo que ahora

---

[3] *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Prólogo, p. XVI. [El párrafo dice exactamente: «...quienes no reconocen directamente, como nosotros, ciertas verdades, sino quizá...»] (*Nota de los editores.*)

se ve de otra manera una experiencia juntamente con la otra. (Igual que un instrumento óptico hace que luz de diferentes fuentes coincida de modo determinado en una figura.)

Imagina que la demostración fuera una obra literaria, una pieza de teatro. ¿La visión de ella no puede inducirme a algo?

No sabía cómo iban a ir las cosas, pero vi una imagen y me convencí de que las cosas irían como en la imagen.

La imagen me ayudó a hacer la predicción. No como un experimento, fue sólo la comadrona de la predicción.

Pues, sean, o fueran, cuales sean mis experiencias, tengo que *hacer* aún la predicción. (Las experiencias no la hacen por mí.)

Entonces, no es ninguna gran maravilla que la demostración nos ayude a hacer la *predicción*. Sin esa imagen no hubiera podido decir cómo resultarán las cosas, pero al verla echo mano de ella para la predicción.

No puedo predecir qué color tendrá una composición química con la ayuda de una imagen que me muestre las sustancias en el tubo de ensayo y su reacción. Si la imagen muestra producción de espuma y, al final, cristales rojos, no puedo decir: «Sí, *así* tiene que ser eso», o «No, así no puede ser eso.» Otra cosa sucede, sin embargo, cuando veo la imagen de un mecanismo en movimiento; ella puede enseñarme cómo se moverá realmente una parte. Pero si me representara la imagen de un mecanismo, cuyas partes estuvieran compuestas de un material muy blando (pasta, por ejemplo) y se torcieran, por ello, de diferentes maneras en la imagen, entonces la imagen quizá no me ayudaría esta vez a hacer una predicción.

¿Puede decirse: que un concepto se forma de tal modo que se adapte a una predicción determinada, esto es, que la posibilita en los términos más simples?

34. El problema filosófico es: ¿cómo podemos decir la verdad, y *sosegar*, a la vez, estos grandes prejuicios?

Hay diferencia: entre considerar algo como un engaño de los sentidos o como un acontecimiento externo, entre tomar ese objeto como medida de aquél o al contrario, entre resolverme a que decidan dos criterios o sólo uno.

35. Si se ha calculado correctamente tiene que resultar eso: ¿tiene que resultar, pues, *siempre eso*? Naturalmente.

Al estar educados para una técnica, también lo estamos para un punto de vista, que está *tan firmemente* asentado como esa técnica.

Parece que la proposición matemática no trata ni de signos, ni de personas, y, por eso, tampoco lo *hace*.

Muestra *las* conexiones que consideramos rígidas. Pero, en cierta medida, miramos fuera de esas conexiones, a otra cosa. Les volvemos la espalda, por así decirlo. O nos respaldamos en ellas o nos apoyamos sobre ellas.

Otra vez: no vemos la proposición matemática como una proposición que trate de signos, por eso tampoco lo *es*.

La reconocemos *en cuanto que* le volvemos la espalda.

¿Qué sucede, por ejemplo, con las leyes fundamentales de la mecánica? Quien las entiende tiene que saber en qué experiencias se apoyan. Otra cosa sucede con las propiedades de la matemática pura.

36. Una proposición puede describir una imagen y esa imagen estar anclada variopintamente en nuestro punto de vista sobre las cosas, esto es, en nuestro modo de vida y de acción.

¿No es la demostración una razón *demasiado endeble* para abandonar completamente la búsqueda de una construcción de la trisección? Sólo has recorrido la serie de signos una o dos veces, y ¿ya quieres decidirte? ¿Sólo porque has visto esa única transformación quieres abandonar ya la búsqueda?

El efecto de la demostración es, según creo, que el hombre se zambulle dentro de la nueva regla.

Hasta ahora había calculado según tal y tal regla; ahora alguien le demuestra que también puede calcularse de otro modo, y cambia (a la otra técnica), no porque se diga a sí mismo que también así funcionarán las cosas, sino porque siente que la nueva técnica es idéntica a la antigua, porque tiene que darle el mismo sentido, porque la reconoce idéntica igual que reconocer que este color es azul.

Es decir, la captación de las relaciones matemáticas desempeña un papel semejante a la captación *de la identidad*. Casi podría decirse que se trata de un tipo complicado de identidad.

Podría decirse: las razones por las que cambia ahora a otra técnica son del mismo tipo que las que le permiten realizar una nueva multiplicación tal como lo hace; en cuanto reconoce que la técnica es la *misma* que había aplicado en otras multiplicaciones.

37. Una persona está *presa* en una habitación, si la puerta no está cerrada y se abre hacia dentro, pero no se le ocurre la idea de *tirar*, en vez de empujarla.

38. Cuando el blanco se transforma en negro, algunas personas dicen «Esencialmente sigue siendo lo mismo». Cuando el color se vuelve un grado más oscuro, otras dicen, sin embargo, «Se ha transformado *completamente*».

39. Las proposiciones '$a = a$', '$p \supset p$', «La palabra 'Bismarck' tiene 8 letras», «No existe el verde rosáceo», son todas evidentes y proposiciones sobre la esencia: ¿qué tienen en común? Cada una, obviamente, es de un tipo diferente y tiene un uso diferente. La penúltima es la más parecida a una proposición empírica. Y es comprensible que se le pueda llamar una proposición sintética *a priori*.

Puede decirse: si alguien no *coteja* la serie de números con la serie de letras, no puede saber cuántas letras tiene la palabra.

40. Una figura derivada de otra según una regla. (Algo así como el reverso del tema.)

Después, el resultado establecido como equivalente de la operación.

41. Cuando escribí «la demostración tiene que ser abarcable», ello quería decir: la *causalidad* no desempeña en la demostración papel alguno.

O también: la demostración tiene que poder reproducirse por mera copia.

42. Que al proseguir la división 1:3 siempre se repite 3 como resultado, es algo que se reconoce tan poco por intuición como que la multiplicación 25 × 25 siempre ofrece el mismo resultado cuando se repite.

43. Podría, quizá, decirse que el carácter sintético de las proposiciones matemáticas donde con mayor evidencia se muestra es en la impredecible aparición de los números primos.

Pero no porque sean sintéticas (en este sentido) son menos *a priori*. Podría decirse, quiere decir, que no pueden conseguirse a partir de sus conceptos mediante un tipo de análisis, pero sí que determinan por síntesis un concepto, así como, por ejemplo, puede determinarse un cuerpo por el cruce de prismas.

La distribución de los números primos sería un ejemplo ideal de lo que podría llamarse sintético *a priori*, puesto que puede decirse que en ningún caso puede descubrirse por un análisis del concepto de número primo.

44. ¿No podría hablarse realmente de intuición en la matemática? Pero no de modo que una verdad *matemática* se captara intuitivamente, aunque sí una física o psicológica. Así, sé con *gran* certidumbre que si multiplico diez veces 25 por 25, cada una de ellas me saldrá 625. O sea, sé del hecho psicológico, que esa operación siempre volverá a parecerme correcta; igual que sé que, si escribo de memoria diez veces la serie de números del 1 al 20, uno tras otro, esas listas se mostrarán idénticas al compararlas. ¿Es esto un hecho empírico? Por supuesto, y, sin embargo, sería difícil mencionar experimentos que me convencieran de él. Una cosa así podría denominarse un hecho de *experiencia* intuitivamente conocido.

45. Quieres decir que toda nueva demostración cambia de un modo u otro el concepto de demostración.

Pero ¿de acuerdo a qué principio, entonces, se reconoce algo como nueva demostración? O, más bien, no hay ahí, ciertamente, 'principio' alguno.

46. ¿Conviene que diga ahora: «estamos convencidos de que siempre se volverá a producir el mismo resultado»? No, eso no basta. Estamos convencidos de que siempre resultará, se realizará, la misma operación de cálculo. ¿Es *esto* ahora una convicción matemática? No; puesto que, si no se calculara siempre lo mismo, no podríamos inferir de ello que la operación dé unas veces un resultado y otras otro.

También estamos convencidos, *por supuesto*, de que al calcular repetidamente se repetirá la imagen de la operación de cálculo.

47. ¿No podría yo decir: quien realiza la multiplicación no encuentra, en cualquier caso, el hecho matemático, pero sí la proposición matemática? Pues lo que *encuentra* es el hecho no-matemático y, con ello, la proposición matemática. Pues la proposición matemática es una determinación conceptual que sigue a un descubrimiento.

Encuentras una nueva fisonomía. Ahora, por ejemplo, puedes *memorizarla* o copiarla.

Se ha encontrado, construido, una *nueva* forma. Pero se la usa para ofrecer, con el viejo, un nuevo concepto.

Se cambia el concepto de tal modo que *tiene que* resultar eso.

No encuentro el resultado; encuentro que llego a él.

Y no es un hecho de experiencia que este camino comienza ahí y acaba ahí, sino que he recorrido ese camino, o un camino, hasta ese final.

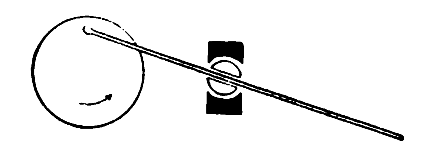
48. Pero ¿no podría decirse que las *reglas* dirigen ese camino, aunque nadie lo recorra?

Pues esto es, ciertamente, lo que se quiere decir, y aquí vemos la máquina matemática, que, impulsada por las propias reglas, sólo obedece leyes matemáticas y no físicas.

Quiero decir: el trabajo de la máquina matemática sólo es la *imagen* del trabajo de una máquina.

La regla no trabaja, pues, sea lo que sea lo que ocurre según la regla, siempre es una interpretación de la regla.

49. Supongamos que tengo ante mí la imagen de los estadios del movimiento de



Ello me ayuda a construir una proposición, que, por así decirlo, leo en esa imagen. La proposición contiene la palabra «aproximadamente» y es una proposición de la geometría.

Es extraño que haya de leer una proposición en una *imagen*.

Pero la proposición no trata de la imagen que veo. No dice que en esa imagen se ve tal y tal cosa. Pero tampoco dice lo que hará el mecanismo real, aunque lo sugiere.

Pero ¿podría hacer otros dibujos también del movimiento del mecanismo, si sus partes no se alteran? Es decir, ¿no estoy *compelido*, precisamente, a aceptar esto, *bajo estas condiciones*, como imagen del movimiento?

Imaginemos la construcción de los estadios del mecanismo con rayas de diferente color. Que las rayas sean negras sobre fondo blanco en parte, y, en parte, blancas sobre fondo negro. Imagínate las construcciones realizadas así euclídeamente; perderán toda evidencia.

50. Invertida, la palabra tiene un *nuevo* rostro.

¿Qué, si se dijera: Quien ha invertido la secuencia 123, *aprende* con respecto a ella que, invertida, resulta 321? Y, ciertamente, lo que él aprende no es una propiedad de esas rayas de tinta, sino una secuencia de *formas*. Aprende una propiedad *formal* de formas. La proposición que enuncia esa propiedad formal se demuestra por la experiencia que le muestra el surgimiento de una de las formas, de ese modo, a partir de la otra.

¿Tiene ahora, quien eso aprende, *dos* impresiones? ¿Una, que la secuencia se *invierte*, otra, que resulta 321? ¿Y no podría tener

la experiencia, la impresión, de que 123 se invierte y no la de que resulte 321? Se dirá quizá: «sólo por una extraña ilusión».

¿Por qué no puede decirse, propiamente, que aquella proposición formal se aprende de la experiencia?, porque a eso se le llama esa experiencia sólo cuando ese proceso conduce a ese resultado. La experiencia a que nos referimos se compone ya de ese proceso con ese resultado.

Por eso ella es más que la experiencia de ver una imagen.

¿Puede una fila de palabras admitir dos inversiones?

Por ejemplo, una acústica y otra óptica. Supongamos que explico a alguien lo que es, a lo que se llama, inversión de una palabra sobre el papel. Y ahora resulta que él nos viene con una inversión acústica de la palabras, es decir, con algo que él llama así, pero que no se corresponde del todo con lo escrito. De modo que puede decirse: él oye *eso* como inversión de la palabra. Como si se le distorsionara la palabra, por así decirlo, al invertirla. Y esto podría suceder, por ejemplo, si pronuncia fluidamente la palabra y la inversión, contrariamente a si las deletrea. O la inversión podría parecer otra cosa si dice la palabra hacia atrás y hacia adelante de *una* vez.

Sería posible que la imagen especular exacta de un perfil, vista inmediatamente después de éste, jamás se considerara igual que él, y vuelta sólo en la otra dirección; y que, para dar la impresión de una inversión exacta, hubiera, entonces, que modificar un poco las medidas del perfil.

Quiero decir, sin embargo, que no hay derecho a decir: podríamos dudar, en efecto, sobre la correcta inversión, de una larga palabra, por ejemplo, pero *sabemos* que la palabra sólo admite *una* inversión.

«Si, pero si ha de tratarse de una investigación en *este* sentido, entonces no puede haber más que *una*.» ¿Significa aquí 'en este sentido': según estas reglas, o: con esta fisonomía? En el primer caso la proposición sería tautológica, en el segundo, no tiene por qué ser verdadera.

51. Imagínate una máquina 'construida de tal modo' que invierta una fila de palabras. Y ahora la proposición que dice que el resultado, en el caso de

A B E R,
es R E B A.

Tal como se la entiende realmente, la regla parece ser una fuerza impulsora que invierte *así* una secuencia ideal, haga lo que haga una persona con una secuencia real.

Este es, pues, el mecanismo que es el patrón de medida, el ideal, del real.

Y esto es comprensible. Pues si el resultado de la inversión se convierte en criterio de que la fila se invirtió realmente, y expresamos esto como imitación nuestra de una máquina ideal, entonces esa máquina tiene que producir *indefectiblemente* ese resultado.

52. ¿Puede decirse ahora que los conceptos que crea la matemática son una conveniencia que esencialmente funcionaría también sin ella?

Ante todo, la adopción de esos conceptos expresa la expectativa *cierta* de determinadas experiencias.

No aceptamos, por ejemplo, que una multiplicación no dé siempre el mismo resultado.

Y lo que esperamos con certidumbre es esencial para toda nuestra vida.

53. ¿Por qué, entonces, no he de decir, sin embargo, que las proposiciones matemáticas expresan precisamente esas determinadas expectativas, es decir, pues, experiencias? Sólo, justamente, porque no lo hacen. La adopción de un concepto es una medida que yo no aceptaría probablemente si no esperara con resolución la ocurrencia de ciertos hechos; pero, por ello, la estipulación de esta medida no es equivalente a la expresión de las expectativas.

54. Es difícil colocar el cuerpo real en el plano correcto: considerar lo dado como dado. Es difícil colocar el cuerpo de otro modo del que uno está acostumbrado a verlo. En un trastero una mesa parece que siempre ha de estar patas arriba, por motivos de ahorro de espacio, por ejemplo. Por eso siempre he visto el cuerpo real colocado *así*, por motivos diferentes; y ahora he de considerar algo distinto como comienzo suyo y algo distinto, como su final. Esto es difícil. El, por así decirlo, no quiere ponerse así, a no ser que se le sostenga en esa posición mediante otros dispositivos.

55. *Una cosa* es usar una técnica matemática, que consista en evitar la contradicción, y otra, filosofar en general contra la contradicción en matemática.

56. La contradicción. ¿Por qué precisamente *un* fantasma así? Esto es muy sospechoso.

¿Por qué una operación de cálculo, hecha con un fin práctico, de la que resulta una contradicción, no ha de decir simplemente: «Haz lo que quieras, yo, la operación, no decido en esto»?

Podría considerarse la contradicción como una insinuación de los dioses de que conviene que actúe y *no* que medite.

57. «¿Por qué no conviene que haya contradicciones en la matemática?»—Bueno, ¿por qué no puede haberlas en nuestros simples juegos? (Seguramente hay cierta conexión entre ambas cosas.) ¿Es esto, pues, una ley fundamental que domina todos los juegos de lenguaje imaginables?

Supongamos que una contradicción en una orden, por ejemplo, produce sorpresa e indecisión, y ahora decimos: ésta es, precisamente, la finalidad de la contradicción en ese juego de lenguaje.

58. Alguien viene a la gente y dice: «Yo miento siempre». Ellos contestan: «¡Bueno, entonces podemos confiar en ti!»—Pero ¿pudo *él* pensar lo que decía? ¿No hay un sentimiento de que uno es incapaz de decir algo auténticamente verdadero; sea lo que sea?

«¡Miento siempre!»—Bueno, ¿y qué sucedía con *esa* proposición?—«¡También ella era mentira!»—¡Pero, entonces, resulta que no mientres siempre!—«¡Sí, todo es mentira!»
Quizá dijéramos de esa persona que no se refiere a lo mismo que nosotros con «verdadero» y con «mentir». Quizá se refiera a algo así: que lo que dice, vibra; o que nada viene realmente del corazón.

Podría decirse también: su «yo miento siempre» no era propiamente una *afirmación*. Más bien era una exclamación.

¿Puede, pues, decirse: «Si no profirió esa proposición sin pensar, entonces hubo de pensar las palabras de tal y tal modo, no *pudo* pensarlas al modo usual»?

59. ¿Por qué no habría de considerarse la contradicción russelliana como algo supraproposicional, como algo que impera sobre las proposiciones y mira en ambas direcciones a la vez, como la cabeza de Jano? N.B. La proposición $F(F)$ —en la que $F(\xi) = \sim\xi(\xi)$— no contiene variables y podría valer, entonces, como algo supralógico, como algo intangible, cuya negación vuelve a *afirmarlo*. Sí, ¿no se podría, incluso, comenzar la lógica con esta contradicción? Y desde ella, por así decirlo, descender a las proposiciones.

La proposición autocontradictoria campearía como un monumento (con una cabeza de Jano) sobre las proposiciones de la lógica.

60. Lo pernicioso no es esto: producir una contradicción en la región en la que no tienen nada que hacer ni la proposición consistente ni la contradictoria; pero sí esto: no saber cómo se ha llegado allí donde la contradicción ya no causa daño.

PARTE V
1942-1944

1. Es claro, naturalmente, que el matemático, en tanto que realmente 'juega un juego', *no hace inferencia alguna*. Pues 'jugar' ha de significar aquí: *actuar* de acuerdo a ciertas reglas. Y ya supondría una salida del mero juego: que infiriera que, según la regla general, aquí puede actuar así.

2. ¿*Calcula* la calculadora?

Imagina que hubiera aparecido por casualidad una calculadora; y que alguien aprieta casualmente sus botones (o un animal anda sobre ellos) y ella realiza el producto 25 × 20.

Quiero decir: es esencial a la matemática que sus signos se usen también en lo *civil*.

Es el uso fuera de la matemática, es decir, el *significado* de los signos, lo que convierte en matemática el juego de signos.

Así como tampoco es una inferencia lógica el que yo transforme una configuración en otra (una colocación de sillas,

por ejemplo, en otra), si esas colocaciones no tienen un uso lingüístico fuera de esa transformación.

3. Pero ¿no es verdad que alguien, que no tuviera ni idea del significado de los signos russellianos, podría *repasar* las demostraciones de Russell? ¿Y que, en un sentido importante, pues, podría verificar si son correctas o falsas?

Podría adiestrarse una calculadora humana de tal modo que, si se le muestran las reglas de inferencia, ejemplificadas incluso, recorra, leyendo, las demostraciones de un sistema matemático (por ejemplo, el de Russell) e incline la cabeza tras toda inferencia bien hecha, la mueva de un lado a otro, sin embargo, ante una falta y deje de calcular. Por lo demás, esta criatura podría uno imaginársela completamente idiota.

Llamamos demostración a algo que puede repararse, pero también copiarse.

4. Si la matemática es un juego, entonces jugar un juego es hacer matemática, ¿y por qué no también bailar?

Imagínate que hubiera en la naturaleza máquinas calculadoras, pero que sus cajas fueran opacas para los seres humanos. Y que estos seres humanos utilizaran esos aparatos como nosotros el cálculo, por ejemplo, aunque sin saber nada al respecto. Que, por ejemplo, hicieran predicciones con ayuda de las calculadoras, pero para ellos la manipulación de esos extraños objetos fuera un experimento.

A esas gentes les faltan conceptos que nosotros tenemos: pero ¿qué es lo que los reemplaza?

Piensa en el mecanismo cuyo movimiento considerábamos como demostración geométrica (cinemática): es claro que normalmente no se diría de alguien, que da vueltas a la rueda, que demuestra algo. ¿No sucede lo mismo con aquel que, por jugar, coloca signos en fila y hace cambios con ellos; aunque lo que así resulte pueda considerarse como una demostración?

Decir que la matemática es un juego ha de querer significar: en la demostración no necesitamos apelar para nada al significado de los signos, es decir, a su aplicación extramatemática. Pero ¿qué significa siquiera, entonces: apelar a él? ¿Cómo una apelación así puede servir para algo?

¿Significa eso salir de la matemática y volver a regresar a ella, o pasar de un método matemático de inferencia a otro?

¿Qué significa obtener un nuevo concepto de la superficie de una esfera? ¿Hasta qué punto es eso, entonces, un concepto de la superficie de una *esfera*? Ciertamente, sólo en tanto pueda aplicarse a esferas reales.

¿Hasta qué punto se necesita tener un concepto de 'proposición' para comprender la lógica matemática russelliana?

5. Si es esencial para la matemática la aplicación planeada ¿qué decir de partes de la matemática, cuya aplicación —o *aquello*, más bien, que los matemáticos consideran aplicación— es del todo fantástica? De modo que, como en la teoría de conjuntos, se cultiva una rama de la matemática de cuya aplicación uno se ha hecho un concepto totalmente falso. ¿No se hace matemática, *a pesar de ello*?

Si las operaciones aritméticas sirvieran únicamente para la construcción de una cifra, su aplicación, naturalmente, sería

fundamentalmente distinta de la nuestra. Pero ¿esas operaciones, entonces, serían siquiera operaciones matemáticas?

¿Puede decirse que hace operaciones matemáticas aquel que aplica una regla de decodificación? Y, sin embargo, sus transformaciones pueden interpretarse así. Pues él podría decir, ciertamente, que calcula qué ha de resultar de la decodificación del signo... de acuerdo con tal y tal clave. Y la proposición: los signos..., decodificados de acuerdo a esta regla, dan por resultado..., es una proposición matemática. Igual que la proposición: que en el ajedrez puede pasarse de *esta* posición a aquella otra.

Imagina que la geometría del espacio cuatridimensional se cultiva con el fin de conocer las condiciones de vida de los espíritus. ¿No es, por eso, matemática? ¿Y puedo decir ahora que determina conceptos?

No sonaría extraño decir de un niño que ya puede hacer miles y miles de multiplicaciones —lo que ha de referirse a que puede calcular ya en el dominio ilimitado del número. Y esto podía tomarse como un modo de expresión extremadamente modesto, incluso, ya que en lugar de 'infinitas' se dijo 'miles y miles'.

¿Podría uno imaginarse seres humanos que en la vida normal no calculan más que hasta 1.000, por ejemplo, y que han reservado las operaciones con cifras más altas para investigaciones matemáticas sobre el mundo de los espíritus?

«Valga o no esto de una superficie esférica *real* —de una matemática, vale»— esto hace que parezca como si la proposición matemática se distinguiera de una proposición empírica sobre todo porque allí donde la verdad de la proposición empírica es oscilante y aproximada, la proposición matemática describe *su* objeto con exactitud y verdad absoluta. Como si la 'esfera

matemática' fuera una esfera. Y uno podría preguntarse, por ejemplo, si sólo hay *una* esfera así o hay varias (una cuestión fregeana).

¿Menoscaban en algo el cálculo, como parte de la matemática, un malentendido sobre su posible aplicación?

Y, a partir de un malentendido, ¿qué pasa con la simple falta de claridad?

Quien cree que los matemáticos han descubierto una curiosa entidad, $\sqrt{-1}$, que elevada al cuadrado da -1, ¿no puede operar perfectamente con números complejos y aplicar tales cálculos a la física? ¿Y son por eso menos *cálculos*?

En *un* sentido, ciertamente, su inteligencia se apoya en pies de barro; pero sacará con seguridad sus conclusiones y su cálculo se apoyará en pies *firmes*.

¿No sería ridículo decir que ése no hace matemática?

Alguien amplía la matemática, aporta nuevas definiciones y descubre nuevos teoremas y, en *cierto* sentido, puede decirse que no sabe lo que hace.—Tiene una vaga idea de haber *descubierto* algo como un espacio (y piensa a este respecto en una habitación), de haber franqueado un reino, y diría muchas tonterías si se le preguntara sobre ello.

Imaginémonos el caso primitivo de que alguien realizara enormes multiplicaciones para, como se ha dicho: conquistar nuevas y gigantescas provincias del reino del número.

Imagínate que el operar con $\sqrt{-1}$ hubiera sido inventado por un loco, que, atraído nada más que por lo paradójico de la

idea, se dedica al cálculo como si fuera una especie de oficio religioso o ritual del absurdo. El imagina que pone por escrito lo imposible y opera con ello.

Con otras palabras: quien cree en los *objetos* matemáticos y en sus extrañas propiedades, ¿no puede hacer matemática? ¿O no hace él también matemática?

'Objeto ideal.' «El signo 'a' designa un objeto ideal» es evidente que se supone que enuncia algo sobre el significado, esto es, sobre el uso, de 'a'. Y ello quiere decir, naturalmente, que este uso es, en cierto sentido, similar al de un signo que tiene un objeto, y que no designa objeto alguno. Pero es interesante lo que de este hecho hace la expresión 'objeto ideal'.

6. En determinadas circunstancias podría hablarse de una fila infinita de esferas.—Imaginemos una fila así, recta, infinita, de esferas a igual distancia unas de otras, y que calculamos la fuerza que todas esas bolas ejercen sobre un cuerpo determinado según una determinada ley de atracción. El número que se obtiene de ese cálculo lo consideramos como el ideal de exactitud para ciertas medidas.

El sentimiento de lo *extraño* proviene aquí de un malentendido. La clase de malentendido que produce un juego del intelecto a atrapar-el-pulgar y al que yo quiero poner término.

La objeción de que 'lo finito no puede captar lo infinito' se dirige *propiamente* contra la idea de un acto psicológico de captar o comprender.

O imagina que decimos simplemente: «Esta fuerza corresponde a la atracción de una fila infinita de esferas, que están ordenadas de tal y tal modo y que atraen a los cuerpos según esta

ley de atracción». O también: «¡Calcula la fuerza que una fila infinita de esferas de tal y tal índole ejerce sobre un cuerpo!» Esa orden tiene, ciertamente, sentido. Se ha descrito una determinada operación de cálculo.

Qué tal este encargo: «Calcula el peso de un pilar compuesto de tantas losas, unas sobre otras, como números cardinales hay; la losa inferior pesa 1 kg., y cada una de las restantes, en orden ascendente, la mitad siempre de la precedente.»

La dificultad *no* está en que no podamos imaginárnoslo. Es suficiente, por ejemplo, imaginarse de algún modo una serie infinita. La cuestión es de qué nos sirve esa imagen.

Imagina números infinitos usados en un cuento de hadas. Los enanos han apilado tantas piezas de oro, una sobre otra, como números cardinales hay, etc. Ha de tener sentido lo que pueda ocurrir en ese cuento, ciertamente.

7. Imagina que la teoría de conjuntos hubiera sido inventada por un satírico como una especie de parodia de la matemática. Que después se la hubiera encontrado un sentido racional y se la hubiera incorporado a la matemática. (Puesto que, si uno[1] la puede considerar como el paraíso de la matemática, ¿por qué otro no como una broma?)

La cuestión es: como broma ¿no es también, obviamente, matemática?

¿Y por qué es, obviamente, matemática?—¿Porque es un juego de signos según reglas?

---

[1] D. Hilbert, *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen 95 (1926). (*Nota de los editores.*)

¿No es evidente que aquí se forman conceptos, aunque no esté claro su uso?

8. Tomemos la construcción del polígono de fuerzas: ¿no es eso un trozo de matemática aplicada? ¿Y dónde está la proposición de la matemática *pura* que se invoca en ayuda de este cálculo gráfico? ¿No es éste un caso como el de la tribu que cuenta con una técnica de cálculo para hacer predicciones determinadas, pero no con proposiciones de la matemática pura?

Una operación de cálculo que sirve para la realización de una ceremonia. De la edad del padre y de la madre y del número de hijos, por ejemplo, se deduce, siguiendo una técnica determinada, el número de palabras de la fórmula de bendición que hay que aplicar a la casa de la familia. Podrían imaginarse procedimientos de cálculo descritos en una ley como la mosaica. ¿Y no podría uno imaginarse que el pueblo que posee esas prescripciones ceremoniales de cálculo, nunca calcula en la vida práctica?

En este caso se trataría, ciertamente, de un cálculo *aplicado*, pero no serviría a los fines de una predicción.

¡¿Sería asombroso que la técnica de cálculo tuviera una familia de aplicaciones?!

9. Lo extraño de la cuestión de si en el desarrollo infinito de π aparecerá la figura φ (una cierta ordenación de cifras, por ejemplo, '770') sólo se aprecia cuando se intenta formular la cuestión de modo totalmente prosaico: los seres humanos han sido adiestrados para colocar signos de acuerdo a ciertas reglas. Proceden, entonces, según ese adiestramiento, y decimos que es un problema saber si *alguna vez* siquiera escribirán la figura φ siguiendo la regla dada.

Pero ¿qué dice quien dice que una cosa está clara: que en el desarrollo infinito se llegará o no a φ?

Me parece que quien esto dice formula él mismo ya una regla o un postulado.

¿Y si se respondiera así a una pregunta: 'Hasta ahora no existe aún respuesta alguna a esa pregunta'?

Así podría responder, por ejemplo, el poeta a quien se le pregunta si el héroe de un poema tiene o no una hermana —cuando todavía no se ha decidido al respecto, bien entendido.

La pregunta —yo diría— cambia su estatus cuando es decidible. Pues se produce entonces una conexión que antes no *estaba ahí*.

Se puede preguntar con respecto al adiestrado: '¿Cómo *va a* interpretar la regla en este caso?', o también: '¿Cómo *conviene* que interprete la regla en este caso?' Pero ¿y si no se tomara decisión alguna en relación a esta pregunta? Bueno, entonces la respuesta no es: 'conviene que él la interprete de modo que φ aparezca en el desarrollo', ni: 'conviene que él la interprete de modo que no aparezca', sino: 'no hay nada decidido al respecto'.

Por muy extraño que suene, el desarrollo ulterior de un número irracional es un desarrollo ulterior de la matemática.

Matematizamos con conceptos.—Y con ciertos conceptos más que con otros.

Yo diría: *Parece* como si hubiera ya un motivo de decisión; y hay que inventarlo todavía.

¿Habría que decir aún: al pensar sobre la técnica de desarrollo aprendida, se utiliza la falsa imagen de un desarrollo completo (aquella que ordinariamente llamamos «fila») y ello nos obliga a formular cuestiones irresolubles?

Pues, en definitiva, toda cuestión sobre el desarrollo de $\sqrt{2}$ habría de poder reducirse a una cuestión práctica concerniente a la técnica de desarrollo.

Y, naturalmente, aquí no se trata sólo del caso del desarrollo de un número real o de la producción de signos matemáticos en general, sino de cualquier proceso análogo, sea un juego, un baile, etc.

10. Si alguien nos martillea con la cuestión de que el principio de tercio excluso no puede eludirse, entonces está claro que hay algo en su pregunta que no está en orden.

Si alguien establece el principio de tercio excluso, nos presenta, por así decirlo, dos imágenes a elegir, y dice que una de ellas tiene que corresponder al hecho. Pero ¿y si es cuestionable que puedan aplicarse aquí esas imágenes?

Y quien dice que el desarrollo infinito tiene que incluir o no incluir la figura φ, ése nos muestra, por así decirlo, la imagen de una fila inabarcable con la vista, que se pierde en la lejanía.

Pero ¿y si la imagen comenzara a oscilar en la lejanía?

11. Decir que una serie infinita *no* contiene una figura determinada es algo que sólo tiene sentido en condiciones muy especiales.

Eso quiere decir: a esa proposición se le ha dado sentido para ciertos casos.

Parecido a esto: está en la *ley* de esta serie el no incluir la figura...

También: siguiendo el cálculo del desarrollo, derivo nuevas leyes, a las que obedece la serie.

«Está bien, entonces podemos decir: 'Tiene que estar en la ley de la serie el que la figura aparezca, o lo contrario'.» Pero ¿es así?—«Bueno, ¿no *determina* completamente, pues, la ley de desarrollo a la serie? Y si lo hace, si no permite ambigüedades, entonces tiene que decidir implícitamente *todas* las cuestiones referentes a la estructura de la serie.»—Estás pensando en series finitas.

«Pero están determinados todos los miembros de la serie, desde el 1.° hasta el 1.000.°, hasta el 10^{10}.°, y así sucesivamente; *todos* los miembros están determinados, por tanto.» Esto es correcto si ha de significar que no es el caso, por ejemplo, que tal y tal enésimo *no* esté determinado. Pero ya ves que *esto* no te aclara en absoluto si aparecerá en la serie una figura concreta (caso de que no haya aparecido ya). *Vemos, por tanto*, que usamos una *imagen* engañosa.

Si quieres saber más sobre la serie tienes que entrar, por así decirlo, en otra dimensión (como si desde la línea entraras en el plano que la rodea).—Pero ¿no está ya el plano *ahí*, igual que la línea, precisamente, para ser *investigado* en caso de que se quiera saber cómo suceden las cosas?

No, la matemática de esa otra dimensión ha de ser inventada igual que toda matemática.

La pregunta cuántas son 4+3 no tiene aún sentido en una aritmética en la que no se cuente más allá de 5. Pero sí puede existir el problema de dar un sentido a esa pregunta. Esto quiere decir: la pregunta tiene tan *poco* sentido como el principio de tercio excluso aplicado a ella.

12. Uno cree tener ya en el principio de tercio excluso algo seguro, que en ningún caso puede ponerse en duda. Mientras que en realidad esa tautología tiene un sentido (si se me permite hablar así) tan fluctuante como la cuestión de si el caso es p o $\sim p$.

Imagina que yo preguntara: ¿qué quiere decirse con «la figura... aparece en este desarrollo»? La respuesta será: «Tú *sabes* perfectamente lo que quiere decir eso. Aparece igual que la figura... aparece de hecho en el desarrollo.»—O sea, ¿que aparece *así*? Pero *¿cómo* es eso?

Imagina que alguien dijera: ¡«O bien aparece, o bien no aparece»!

«Pero ¿es que no entiendes realmente lo que se quiere decir?» Pero ¿no puedo creer que lo entiendo y equivocarme?

¿Cómo sé, pues, lo que quiere decir: la figura... aparece en el desarrollo? Por ejemplos, naturalmente, que me muestran qué sucede cuando... ¡Tales ejemplos, sin embargo, no me muestran qué sucede cuando la figura aparece en el desarrollo!

¿No podría decirse: si yo tuviera realmente derecho a decir que esos ejemplos me enseñan qué sucede cuando la figura aparece en el desarrollo, entonces también habrían de mostrarme lo que significa lo contrario de la proposición?

13. La proposición general que dice que la figura no aparece en el desarrollo sólo puede ser una *orden*.

¿Y qué si las proposiciones matemáticas se consideran órdenes y como tales se las pronuncia, además? «Que 25^2 dé 625.»

Bien; una orden tiene una negación interna y otra externa.

Los símbolos «$(x) \cdot \varphi x$» y «$(\exists x) \cdot \varphi x$» son, ciertamente, útiles en matemática si se conoce, además, la técnica de las demostraciones de existencia o de no-existencia, a las que remiten *aquí* los signos russellianos. Pero si eso se deja abierto, estos conceptos de la vieja lógica resultan extremadamente equívocos.

Si alguien dice: «Pero tú sabes, ciertamente, lo que significa 'la figura aparece en el desarrollo', o sea, *esto*» —y hace referencia a un caso de aparición—, entonces sólo puedo responder que lo que me cuenta puede ilustrar hechos *diferentes*. Por eso no puede decirse que sé lo que significa la proposición porque sé que él la va a usar seguramente en este caso.

Lo contrario de «hay una ley que dice que *p*» no es: «hay una ley que dice que $\sim p$». Pero uno se buscará dificultades si expresa lo primero mediante *P* y lo otro mediante $\sim P$.

14. Y qué si a los niños se les enseña que la tierra es un plano infinito; o que Dios ha creado una serie infinita de estrellas; o que una estrella vuela en línea recta uniformemente, más y más allá siempre, sin pararse jamás.

Extraño: si se toma esto con toda tranquilidad, por así decirlo, como algo que se da por supuesto, entonces pierde todo lo paradójico. Es como si alguien dijera: Tranquilízate, esa serie o movimiento avanza sin pararse jamás. Es como si se nos dispensara de la molestia de pensar en un final.

'No tomaremos en consideración la cuestión de un final'.

También podría decirse: 'para nosotros la serie es infinita'.

'No nos preocuparemos por el final de una serie; para nosotros siempre es inalcanzable.'

15. No pueden *enumerarse* los números racionales porque no puede uno contarlos, pero puede contarse mediante los números racionales, a saber, igual que con los cardinales. Un modo bizqueante de expresión va unido al sistema entero de simulación, a saber, a aquel en el que con el nuevo aparato tratamos los conjuntos infinitos con la misma seguridad que hasta ahora sólo los finitos.

No convendría que se dijera 'enumerable', sí tendría sentido, por el contrario, decir 'numerable'. Y esta expresión permite reconocer también una aplicación del concepto. Puesto que puede que no se quiera enumerar los números racionales, pero sí asignarles un número.

Pero ¿dónde está aquí el problema? ¿Por qué no he de decir que lo que llamamos matemática es una familia de actividades en orden a una familia de fines?

Los seres humanos podrían, por ejemplo, usar operaciones de cálculo con vistas a una especie de competición. Tal como los niños compiten a veces a calcular; sólo que entre nosotros ese uso desempeña un papel totalmente secundario.

Podría suceder también que el multiplicar nos resultara más difícil de lo que lo hace, si sólo calculáramos oralmente, por

ejemplo, y para recordarnos de una multiplicación, así pues, para captarla, fuera necesario ofrecerla en forma de un poema rimado. Si alguien hubiera conseguido tal cosa, tendría el sentimiento de haber encontrado una verdad grande, maravillosa.

Para cada multiplicación sería necesario, por así decirlo, un nuevo trabajo individual.

Si esa gente creyera ahora que los números son espíritus e investigara, mediante sus cálculos, el reino de los espíritus, u obligaran a los espíritus a manifestarse, sería esto aritmética? ¿O sería aritmética, también, si esas personas no usaran el cálculo para ninguna otra cosa?

16. Resulta próxima la comparación con la alquimia. Podría hablarse de una alquimia en la matemática.

¿Es alquimia matemática el hecho ya de que las proposiciones matemáticas se consideren como enunciados sobre objetos matemáticos; esto es, la matemática como investigación de esos objetos?

En cierto sentido no puede apelarse en matemática al significado de los signos, porque es la matemática quien les da primero su sentido.

Lo típico del fenómeno del que hablo es que lo *misterioso* de un concepto matemático cualquiera no se interpreta *inmediatamente* como concepción errónea, como concepto defectuoso; sino como algo que en ningún caso hay que despreciar, sino, más bien, que respetar incluso.

Todo lo que he de hacer es mostrar un camino fácil para salir de esta oscuridad y del brillo de los conceptos.

Puede decirse, curiosamente, que en todas estas brillantes formaciones conceptuales hay, por así decirlo, un núcleo sólido. Y yo diría que es el que hace de ellas producciones matemáticas.

Podría decirse: lo que ves más bien parece, realmente, una brillante ficción etérea; pero mírala desde otro lado y verás el sólido cuerpo, que sólo desde aquella dirección aparece como un brillo sin substrato corpóreo.

17. 'La figura está en la serie o no está en la serie' quiere decir: o vemos la cosa así o no la vemos así.

¿Cómo sabe uno lo que significa lo contrario de la proposición «φ aparece en la serie», o también de la proposición «φ no aparece en la serie»? Esta pregunta suena absurda, pero tiene, sin embargo, sentido.

Esto es: ¿cómo sé yo que comprendo la proposición «φ aparece en la serie»?

Es verdad, puedo ofrecer ejemplos del uso de tales enunciados, y también de los contrarios. Y se trata de ejemplos de que hay una regla que prescribe la aparición en una zona determinada o en una serie de zonas; o que determina que esta aparición queda excluida.

Si «tú haces eso» quiere decir: debes hacer eso, y «tú no haces eso» quiere decir: no has de hacer eso; entonces «tú haces eso o tú no haces eso» no es el principio de tercio excluso.

Todos nos sentimos incómodos ante la idea de que una proposición pueda declarar que en una serie infinita no aparece esto ni esto; por el contrario, no tiene nada extraño que una orden diga: en esta serie, por mucho que se la desarrolle, no debe aparecer esto.

Pero ¿de dónde esa diferencia entre: «por muy lejos que vayas no encontrarás esto jamás» y «por muy lejos que vayas no debes hacer eso»?

Ante esa cuestión cabe preguntar: «¿cómo puede saberse algo así?», pero nada análogo vale de una orden.

El enunciado puede abusar de sus fuerzas, la orden no, en absoluto.

¿Puede uno imaginarse que todas las proposiciones matemáticas se expresaran en imperativo? Por ejemplo: «¡Que 10 × 10 sean 100!»

Y quien dice ahora: «Que sea así, o que no sea así», no expresa el principio de tercio excluso, pero sí una *regla*. (Tal como ya he dicho antes.)

18. Pero ¿es esto realmente una solución del problema? Pues ¿qué sucede, entonces, con todas las demás proposiciones matemáticas, digamos '$25^2 = 625$'; no vale para ellas el principio de tercio excluso *dentro* de la matemática?

¿Cómo se aplica el principio del tercio excluso?

«No hay una regla que lo prohíba, ni una que lo prescriba.»

Supuesto que no haya regla alguna que prohíba la aparición, ¿por qué ha de haber una que la prescriba?

¿Tiene sentido decir: «No hay, es verdad, regla alguna que prohíba la aparición, pero la figura no aparece de hecho»? Y, si esto no tiene sentido, ¿cómo puede tenerlo lo contrario, es decir, que la figura aparezca?

Bueno, cuando digo que aparece, me ronda la cabeza la imagen de una serie desde el principio hasta esa figura; pero cuando digo que la figura *no* aparece, no me vale de nada ninguna imagen así, y las imágenes se me agotan.

¿Qué sucede si la regla se doblara imperceptiblemente con el uso? Me refiero a que yo pudiera hablar de diferentes espacios en los que la uso.

Lo contrario de «φ no puede aparecer» es «φ puede aparecer». Pero para un segmento *finito* de la serie parece que lo contrario de «φ no puede aparecer en él» es «φ *tiene que* aparecer ahí».

Lo curioso de la alternativa «φ aparece en la serie infinita, o no aparece» es que hemos de imaginar las dos posibilidades por separado, que buscamos para cada una una representación distinta, y que no basta *una*, como de costumbre, para el caso positivo y para el negativo.

19. ¿Cómo sé que tiene sentido la proposición general «Hay...»? Bueno, si puede ser usada en un juego de lenguaje para comunicar algo sobre la técnica del desarrollo.

Una comunicación dice: «no puede aparecer»; esto es, si ello aparece es que has calculado mal.

Otra dice: «puede aparecer»; esto es, no existe una prohibición así. Otra: «tiene que aparecer en tal y tal región (siempre en este

lugar de estas regiones)». Pero parece que lo contrario es: «no puede aparecer allí ni allí», en lugar de «no *tiene que* aparecer allí».

Pero ¿qué sucede si se da la regla, por ejemplo, de que, siempre que de la regla de formación de π resulte 4, podrá ponerse en lugar de 4 cualquier otra cifra arbitrariamente?

Considera también la regla que prohíbe una cifra en determinados sitios, pero que lo deja a elección en los restantes.

¿No es así: en las proposiciones matemáticas los conceptos de decimales infinitos no son conceptos de series, sino de la técnica ilimitada del desarrollo de series?

Aprendemos una técnica sin fin: esto es, algo se hace delante de nosotros, nosotros lo repetimos; se nos dicen reglas y nosotros hacemos ejercicios de seguimiento suyo; quizá se use para ello también una expresión como «y así sucesivamente *ad inf.*», pero no por ello se trata aquí de un desarrollo gigantesco.

Esos son los hechos. ¿Y qué significa ahora: «φ aparece en el desarrollo o no aparece»?

20. Pero ¿no significa eso, ahora, que no es ningún problema: «¿Aparece la figura φ en ese desarrollo?»?—Quien esto pregunta, pregunta por una regla concerniente a la aparición de φ. Y la alternativa de la existencia o no-existencia de una regla así no es, en todo caso, una alternativa matemática.

Sólo dentro de un edificio matemático, aún por construir, permite esa pregunta una decisión *matemática*, y se convierte, con ello, en estímulo de tal decisión.

21. Y si el infinito no es actual, ¿no puedo decir: «estas dos aristas de la baldosa se cortan en el infinito»?

No «el círculo tiene esa propiedad porque atraviesa dos puntos... infinitamente lejanos»; sino: «las propiedades del círculo pueden considerarse desde esa (curiosa) perspectiva».

Es esencial una perspectiva, y una traída de lejos. (Con ello no se expresa reproche alguno.) Pero siempre ha de estar perfectamente claro *cuál es la lejanía* de la que se ha traído ese modo de ver las cosas. Porque, si no, su auténtico *significado* queda oscuro.

22. ¿Qué quiere decir: «el matemático no sabe lo que hace», o «sabe lo que hace»?

23. ¿Pueden hacerse predicciones infinitas?—Bueno, ¿por qué no ha de llamarse así a la ley de inercia, por ejemplo? ¿O a la proposición que dice que un cometa describe una parábola?

En cierto sentido, su infinitud, efectivamente, no se toma en serio.

¿Qué sucede ahora con una *predicción:* de que quien desarrolla π, por muy lejos que vaya, nunca se topará con la figura φ?—Bueno, podría decirse que eso no es ni una predicción *no-matemática*, ni una regla matemática.

Alguien que ha aprendido a desarrollar $\sqrt{2}$ va a una adivina y ésta le predice que, por mucho que desarrolle $\sqrt{2}$, nunca llegará a una figura...—¿Es su predicción una proposición matemática? No.—A menos que diga: «Si siempre realizas correctamente el desarrollo, nunca llegarás...» Pero ¿es esto todavía una predicción?

Parece ahora que sería pensable una *predicción* tal sobre el desarrollo correcto y que se diferencia de una ley matemática que diga que las cosas *tienen que* comportarse de tal y tal modo. De manera que en el desarrollo matemático hubiera una diferencia

entre lo que de hecho resulta así —casualmente, digamos— y lo que tiene que resultar.

¿Cómo decidir si una predicción matemática tiene sentido? No, desde luego, diciendo: «estoy seguro de que me *refiero* a algo cuando digo...».

Tampoco se trata tanto de la cuestión de si la predicción tiene algún sentido, cuanto de qué clase de sentido tiene. (O sea, en qué juegos de lenguaje aparece.)

24. «La nociva irrupción» de la lógica en la matemática.

Esto es una prueba de existencia en el campo así preparado.

Lo malo de la técnica lógica es que nos hace olvidar la técnica específicamente matemática. Mientras que la técnica lógica sólo es una técnica auxiliar en la matemática. Crea, por ejemplo, determinadas conexiones entre otras técnicas.

Es casi como decir que la carpintería consiste en encolar.

25. La demostración te convence de que hay una raíz de la ecuación (sin darte una idea de *dónde*); ¿cómo sabes que entiendes la proposición que dice que hay una raíz? ¿Cómo sabes que realmente estás convencido de algo? Puede que estés convencido de que se hallará la aplicación de la proposición demostrada. Pero no comprendes ésta hasta que no halles aquélla.

Cuando una demostración demuestra en general que *hay* una raíz, todo depende, entonces, de en qué forma lo demuestre. De qué es lo que lleva aquí a esa expresión verbal, que no es más que

una sombra y calla lo *principal*. Mientras que a los lógicos parece que sólo les oculta lo accidental.

Lo general matemático no está con lo particular matemático en la misma relación que está, por lo demás, lo general con lo particular.

Todo lo que digo viene a que puede conocerse exactamente algún sentido, cuanto de qué clase de sentido tiene. (O sea, en qué una demostración y seguirla paso a paso, y, sin embargo, al hacerlo, no *comprender* lo que se ha demostrado.

Y esto vuelve a tener relación con el hecho de que, desde el punto de vista gramatical, puede construirse correctamente una proposición matemática sin comprender su sentido.

¿Cuándo se la comprende, pues? Creo que cuando se la aplica.

Podría decirse, quizá: cuando se tiene una imagen clara de su aplicación. Pero para ello no basta que se conecte con ella una imagen clara. Más bien hubiera sido mejor decir, cuando se tiene una panorámica clara de su aplicación. Y tampoco eso vale, porque se trata sólo de no imaginar que la aplicación está donde no está; de no dejarse embaucar por la forma verbal de la proposición.

Pero ¿cómo sucede, entonces, que pueda no entenderse, o malentenderse de ese modo, una proposición o una demostración? Y ¿qué se necesita, pues, para dar lugar a la comprensión?

Creo que hay casos en los que uno puede aplicar, efectivamente, una proposición (o demostración), y no estar en disposición, sin embargo, de dar cuenta claramente del tipo de aplicación. Y casos en que tampoco sabe aplicar la proposición. (Axioma multiplicativo[2].)

---

[2] Esto es, axioma de elección. (*Nota de los editores.*)

¿Qué sucede a este respecto con $0 \times 0 = 0$?

Se diría que la comprensión de una proposición matemática no está garantizada por su forma verbal, como es el caso en la mayoría de las proposiciones no-matemáticas. Esto quiere decir —parece— que el texto no determina el *juego de lenguaje* en el que funciona la proposición.

La notación lógica se traga la estructura.

26. Para ver cómo puede alguien llamar 'prueba de existencia' a algo que no permite construcción alguna de lo existente, piensa en los diversos significados de la palabra «dónde». (El topológico y el métrico, por ejemplo.)

La prueba de existencia no sólo puede dejar indeterminado el lugar del 'existente', sino que no necesita en absoluto tratar de dicho lugar.

Esto es: cuando la proposición demostrada reza «hay un número para el que...», entonces no ha de tener sentido preguntar «y ¿cuál es ese número?», ni decir «y ese número es...».

27. Una demostración de que 777 aparece en el desarrollo de π, que no muestre dónde, habría de contemplar ese desarrollo desde un punto de vista completamente nuevo, de modo, por ejemplo, que mostrara propiedades de regiones del desarrollo, de las que sólo sabíamos que quedan fuera, muy alejadas. Lo único que se le ocurre a uno en este caso es que habría que suponer en π, fuera, muy lejos, una zona oscura, por así decirlo, de longitud indeterminada, donde nuestros recursos de cálculo ya no resultan fiables, y, más hacia fuera todavía, una zona donde puede volver a verse algo de *otra* manera.

28. Siempre puede imaginarse uno que la prueba por reducción al absurdo se usará al argumentar con alguien que

haga una afirmación no-matemática (por ejemplo: que ha visto que *A* ha dado mate a *B* con tales y tales figuras) que pueda refutarse matemáticamente.

La dificultad que se siente en la matemática por la *reductio ad absurdum* es: ¿qué sucede en esa prueba? ¿Algo matemáticamente absurdo, es decir, no-matemático? ¿Cómo puede siquiera admitirse —preguntaríamos— lo matemáticamente absurdo? No me plantea problema alguno admitir lo físicamente falso y llevarlo *ad absurdum*. Pero ¿cómo pensar, digamos, lo impensable?

Pero la prueba indirecta dice: «Si lo quieres *así*, no puedes admitir *eso:* pues con *eso* sólo sería compatible lo contrario de aquello que no quieres abandonar».

29. La ilustración geométrica del análisis es, ciertamente, inesencial, pero no su aplicación geométrica. Originariamente las ilustraciones geométricas eran *aplicaciones del análisis*. Donde dejan de ser tal cosa pueden con facilidad equivocar completamente.
Y entonces tenemos la aplicación fantástica. La aplicación imaginaria.

La idea del 'corte' es una peligrosa ilustración de ese tipo.

Sólo en tanto en cuanto las ilustraciones son también aplicaciones no producen esa cierta sensación de aturdimiento que produce la ilustración en el momento en que deja de ser una aplicación posible; en que se vuelve estúpida, pues.

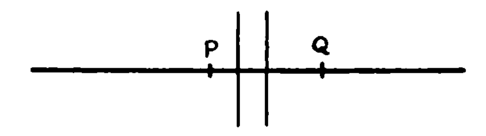
30. Así, se podría deducir el teorema de Dedekind, aunque fuera *totalmente desconocido* lo que llamamos números irracionales, con tal de que hubiera una técnica para jugar a los dados las

posiciones de los números decimales. Y este teorema tendría, entonces, su aplicación, aún cuando no existiera la matemática de los números irracionales. No es que los desarrollos de Dedekind previeran ya todos y cada uno de los números reales. Sólo *parece* así cuando se asocia el cálculo de Dedekind con los cálculos de los números reales concretos.

31. Podría preguntarse: ¿qué es lo que *no* entendería un niño de 10 años en la demostración del teorema de Dedekind?—¿No es ese teorema mucho más simple que cualquiera de las operaciones de cálculo que ha de dominar un niño?—Y si alguien dijera ahora: no puede entender el sentido profundo del teorema; entonces yo preguntaría: ¿cómo llega ese teorema a un sentido profundo?

32. La imagen de la línea de números es absolutamente natural hasta cierto punto: a saber, mientras no se la use como una teoría general de los números reales.

33. Si quieres dividir los números *reales* en una clase inferior y otra superior, hazlo, primero, en bruto mediante



dos puntos racionales *P* y *Q*. Después, divide a la mitad *PQ* y decide en qué mitad (si no en el punto de división) ha de estar el corte; si en la inferior, por ejemplo, divídela a la mitad y toma una decisión más exacta, etc.

Si tienes un principio para proseguir ilimitadamente, puedes decir de él que ejecuta un corte, ya que decide de cada número si está a la derecha o a la izquierda.—Ahora la cuestión es si, mediante tal principio de división, puedo llegar a todas partes, o si

se necesita además otro tipo de decisión; y podría preguntarse si *después* de la decisión completa tomada mediante el principio, o *antes* de acabarla. Bueno, en todo caso no antes de acabarla; pues mientras siga la pregunta sobre el trozo finito de la recta en el que ha de estar el punto, una división ulterior puede decidir siempre. Pero ¿hay todavía espacio para una decisión ulterior, *después* de la decisión tomada mediante un principio?

Resulta con el teorema de Dedekind como con el principio de tercio excluso: parece excluir un tercero, mientras que en él no se habla de un tercero.

La demostración del teorema de Dedekind trabaja con una imagen que no puede justificar*lo*, que ha de ser primero justificada por él.

Tú distingues fácilmente un principio de división para una división infinitamente proseguida, puesto que en ningún caso corresponde a una decisión finita y parece llevarte más y más allá siempre.

34. ¿No se podría *preparar extensionalmente*, más de lo que se hace, la teoría de los límites, las funciones, los números reales, aunque ese cálculo preparatorio hubiera de aparecer *muy* trivial e inútil en sí mismo?

La dificultad de un punto de vista, unas veces intensional, otras nuevamente extensional, comienza ya con el concepto de 'corte'. Es claro, desde luego, que puede llamarse a todo número racional un principio de división de los números racionales. Ahora descubrimos otra cosa, que podemos llamar principio de división, por ejemplo, el que corresponde a $\sqrt{2}$. Después otros semejantes, y así nos familiarizamos plenamente con la posibilidad de tales divisiones, y las vemos bajo la imagen de un corte

producido en alguna parte a lo largo de la recta, *es decir, extensionalmente*. Pues cuando *corto*, puedo elegir dónde quiero cortar.

Pero si un *principio* de división es un corte, lo es tan sólo porque puede decirse de números racionales arbitrarios que están por encima o por debajo del corte.— ¿Puede decirse ahora que la idea del corte nos ha llevado del número racional al número irracional? ¿Hemos llegado a $\sqrt{2}$, por ejemplo, mediante el concepto de corte?

¿Qué es ahora un corte de los números reales? Bueno, un principio de división en una clase por abajo y otra por arriba. Un principio así produce todo número racional e irracional. Pues, aunque no tengamos ningún sistema de los números irracionales, *los que tenemos* se dividen en superiores o inferiores con respecto al corte (en tanto sean comparables con él, bien entendido).

Pero ahora la idea de Dedekind es que la división en una clase superior y otra inferior (en las condiciones sabidas) es el número real.

El corte es una *representación* extensiva.

Es verdad, desde luego, que si tengo un criterio matemático para determinar de un número racional cualquiera si pertenece a la clase inferior o a la superior, resulta fácil aproximarse sistemáticamente a voluntad al lugar donde ambas clases se juntan.

En Dedekind no hacemos un corte por el hecho de cortar, esto es, de señalar un lugar, sino por el de acercarnos —como al buscar $\sqrt{2}$— a los límites adyacentes de la clase superior e inferior.

Hay que demostrar ahora que ningún otro número más que los reales puede realizar tal corte.

No olvidemos que *originariamente* no tenía sentido la división de los números racionales en dos clases, hasta que reparamos en algo que podía describirse así. El concepto *está sacado del uso cotidiano del lenguaje* y parece, por ello, que ha de tener inmediatamente un sentido también para los números.

Si se introduce ahora la idea de un corte de los números *reales*, diciendo que es fácil ya extender el concepto de corte de los números racionales a los reales, pues todo lo que necesitamos es una propiedad que divida los números reales en dos clases, etc., entonces no está claro, *en principio*, qué se quiere significar con una propiedad tal, que divide así *todos* los números reales. Puede, ahora, hacérsenos reparar en que todo número real puede valer para ello. Pero esto sólo nos lleva hasta ahí y no más allá.

35. Las definiciones extensionales de las funciones, de los números reales, etc., sobrepasan todo lo intensional —aunque lo presuponen— y se refieren a la forma externa, siempre recurrente.

36. Nuestro problema comienza propiamente ya con la recta infinita; aunque ya de niños aprendamos que una línea recta no tiene final y yo no sepa que esa idea haya deparado dificultades a nadie. ¿Y si un finitista intentara reemplazar ese concepto por el de un segmento recto de longitud determinada?

Pero la línea recta es una *ley* del continuar.

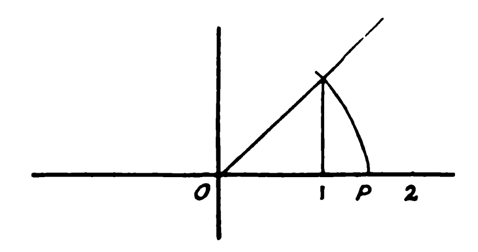
Tal como hoy se los introduce, los conceptos de límite y de continuidad dependen implícitamente del concepto de *demostración*. Puesto que decimos

$$\lim_{x \to r} F(x) = 1 \quad \text{cuando puede demostrarse que...}$$

Esto significa que usamos conceptos que son infinitamente más difíciles de captar que los que mostramos explícitamente.

37. Lo equívoco de la concepción extensional de Dedekind es la idea de que los números reales están desplegados por la línea de números. Puede que se los conozca o no; eso no importa. Y, así, sólo se necesita cortar o dividir en clases, y ya se les ha señalado a todos ellos su sitio.

Es por la *combinación* del *cálculo y de la construcción* como se adquiere la idea de que habría que omitir un punto de la recta, a saber, *P*,



si no se admite $\sqrt{2}$ como una medida de la distancia de *O*. 'Pues si realmente yo construyera con exactitud, el círculo habría de cortar la recta *entre* sus puntos.'

Esta es una imagen terriblemente confusa.

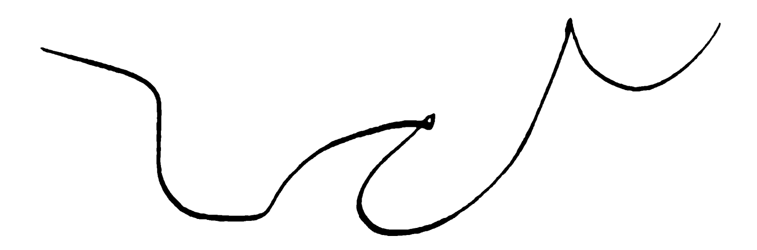
Los números irracionales son —por así decirlo— casos especiales.

¡¿Cuál es la *aplicación* del concepto de línea recta a la que falta un punto?! La aplicación ha de ser 'prosaica'. La expresión «línea recta a la que falta un punto» es una imagen tremendamente equívoca. La fisura abierta entre ilustración y aplicación.

38. La generalidad de las funciones es, por así decirlo, una generalidad *desordenada*. Y nuestra matemática está construida sobre una generalidad desordenada así.

39. Cuando uno se imagina el cálculo general de funciones sin la existencia de ejemplos, entonces las vagas explicaciones por medio de tablas de valores y diagramas, tal como se encuentran en los libros de texto, están ahí como *indicaciones* de cómo, por ejemplo, podría darse sentido alguna vez a ese cálculo.

Imagina que alguien dice: «Me gustaría escuchar una composición musical que procediera así»:



¿Sería ello necesariamente absurdo? ¿No podría existir una composición musical de la que fuera posible mostrar que, en un sentido importante cualquiera, corresponde a esa línea?

¿Y si se considerara la continuidad como propiedad del signo '$x^2+y^2=z^2$'? —naturalmente, sólo si esa ecuación y otras se sometieran *usualmente* a un tipo de test conocido. '*Así* se comporta esa regla (ecuación) frente a ese test concreto.' Un test que se produce con una mirada de soslayo a una especie de extensión.

En ese test de la ecuación se efectúa algo que tiene que ver con ciertas extensiones. Pero no como si se tratara ahí de una extensión que fuera equivalente de algún modo a la ecuación misma. Se alude simplemente a ciertas extensiones, digámoslo así.—No es la extensión lo que propiamente se describe aquí, *faute de mieux*, intensionalmente; sino que es la *intensión* lo que se describe —o representa— mediante determinadas extensiones que se producen aquí y allá a partir de ella.

El decurso de ciertas extensiones arroja una *luz indirecta* sobre la propiedad algebraica de la función. En este sentido podría decirse, entonces, que el dibujo de una hipérbola arroja luz indirectamente, sobre la ecuación de la hipérbola.

A esto no lo contradice que esas extensiones fueran la aplicación más importante de la regla; puesto que una cosa es dibujar una elipse, y otra, construirla *mediante su ecuación.*

Y si yo dijera: las consideraciones extensionales (del teorema de Heine-Borel, por ejemplo) muestran: *así* hay que actuar con intensiones.

El teorema nos proporciona a grandes rasgos un método para proceder con intensiones. Dice algo así como: '*así* es como tiene que ser'.

Y entonces podrá dibujarse, por ejemplo, una ilustración concreta para un procedimiento con intensiones concretas. La ilustración es un signo, una descripción, especialmente abarcable, memorizable.

Ofrecer una ilustración es aquí, justamente, ofrecer un *procedimiento.*

La teoría de cómo colocar las figuras en una imagen (dibujo) —digamos que por motivos estéticos generales— *prescindiendo de* si esas figuras luchan o se acarician, etc.

La teoría de las funciones como un esquema en el que, por una parte, encaja una cantidad enorme de ejemplos, y que, por otra, está ahí como un estándar para la clasificación de casos.

Lo equívoco de la representación usual consiste en que parece que la *general* puede entenderse perfectamente sin ejemplo alguno, sin pensar siquiera en intensión *es* (en plural), ya que, propiamente, todo podría arreglarse extensionalmente si no fuera imposible por motivos externos.

Compara ambas formas de la definición:

«Decimos $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = L$ cuando puede mostrarse que...»,

y

$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = L$ quiere decir: para cada ε existe un δ...»

40. Dedekind ofrece un esquema general de modo de expresión; algo así como una forma lógica del razonamiento.

Una formulación general de un procedimiento. Es un efecto parecido al de la introducción de la palabra «correlación» para la definición general de las funciones. Se introduce un modo general de hablar, muy útil para la caracterización de un procedimiento matemático. (De modo parecido a como sucede en la lógica aristotélica.) Pero el peligro consiste en que con ese modo general de hablar se crea poseer ya la explicación completa de los casos particulares (el mismo peligro que en la lógica).

Determinamos más y más el concepto *de regla* de formación de una fracción decimal ilimitada.

Pero ¡¿y el contenido del concepto?!—Bien, ¿no podemos edificar la construcción conceptual de modo que sirva como receptáculo de cualquier aplicación que pueda sobrevenir? ¿No puedo construir la *forma* (la forma a la que me ha *estimulado* un contenido cualquiera) y preparar, por así decirlo, una forma lingüística para un posible uso? Ya que esa forma, en tanto permanezca vacía, ayudará también a determinar la forma de la matemática.

¿No queda, pues, de este modo, la forma de sujeto-predicado abierta y a la espera de las más variadas y nuevas aplicaciones?

O sea: ¿es verdad que toda la dificultad referente a la generalidad del concepto matemático de función está ya en la lógica aristotélica, ya que podemos abarcar la generalidad de las proposiciones y predicados tan poco como la de las funciones matemáticas?

41. Los conceptos que aparecen en proposiciones 'necesarias' han de aparecer también en proposiciones no necesarias y tener un significado.

42. ¿Diríamos que entiende la proposición '563 + 437 = 1.000' alguien que no sabe cómo puede ser demostrada? ¿Puede negarse que un signo de comprender la proposición es que alguien sepa cómo demostrarla?

El problema de hallar una solución matemática a un teorema podría llamarse, con cierta justicia, el problema de dar sentido matemático a una fórmula.

La ecuación acopla dos conceptos; de modo que puedo pasar de uno a otro.

La ecuación construye una vía conceptual. Pero ¿es una vía conceptual un concepto? Y, si no, ¿existe una distinción clara entre ellos?

Imagina que has enseñado a alguien una técnica de multiplicar. El la aplica en un juego de lenguaje. Para no tener siempre que multiplicar de nuevo, anota la multiplicación en forma abreviada, como ecuación, y usa ésta donde antes multiplicaba.

Ahora dice de la técnica del multiplicar que establece conexiones entre los conceptos. Dirá lo mismo también de la multiplicación como imagen de esa transición. Y, finalmente, también de la ecuación, pues es esencial que la transición también haya de poder representarse simplemente por el esquema de la ecuación. Que la transición, pues, *no* haya de hacerse siempre de nuevo.

Pero ¿se inclinará a decir que el proceso de multiplicar es un concepto?

Es ciertamente un *movimiento*. Parece ser un movimiento entre dos puntos estacionarios; ésos son los conceptos.

Si concibo la demostración como mi *movimiento* de un concepto a otro, tampoco diré, entonces, de ella que es un nuevo concepto. Pero ¿no puedo concebir la multiplicación como *una* imagen, comparable a un signo numérico, y no puede ella funcionar también como signo conceptual?

43. Quiero decir: si unas veces aplicamos un lado de la ecuación, y otras, el otro, aplicamos dos lados del mismo concepto.

44. ¿Es el aparato conceptual un concepto?

45. ¿Cómo muestra alguien que comprende una proposición matemática? Aplicándola, por ejemplo. ¿Y no lo muestra también demostrándola?

Quiero decir: la demostración me muestra una nueva conexión, por ello me proporciona también un nuevo concepto.

¿No es el nuevo concepto la demostración misma?

Ciertamente, cuando la demostración se ha producido puedes formar un nuevo juicio. Puesto que puedes decir, entonces, dē una muestra determinada que es o que no es esa demostración.

Sí, pero ¿es una figura la demostración, considerada, interpretada, como *demostración*? Como *demostración*, podría decir, ha de convencerme de algo. En consideración a ella quiero hacer o dejar de hacer algo. Y en consideración a un nuevo concepto no hago ni dejo de hacer nada. Así pues, yo diría: la demostración es la imagen de la demostración, usada de un modo determinado.

Y aquello de lo que me convence puede ser de muy diferentes tipos. (Piensa en demostraciones de tautologías russellianas, en demostraciones de la geometría o del álgebra.)

Un mecanismo puede convencerme de algo (puede demostrar algo). Pero ¿bajo qué circunstancias, en qué contexto de actividades y problemas, diré que me convence de algo?

«Pero un concepto no me convence de nada, ya que no me muestra un hecho.»—Pero ¿por qué un concepto no me ha de convencer ante todo de que quiero usar*lo*?

¿Por qué el nuevo concepto, una vez formado, no me ha de permitir inmediatamente la transición a un juicio?

46. 'Comprender una proposición matemática'; esto es un concepto muy vago.

Pero si dices «La comprensión no importa en absoluto. Las proposiciones matemáticas son simplemente posiciones en un juego», ¡eso es también absurdo! 'Matemática' no es precisamente un concepto claramente delimitado.

De ahí la discusión sobre si una demostración de existencia, que no es una construcción, es una auténtica demostración de existencia. La pregunta es: ¿*comprendo* la proposición «Existe...» si no tengo posibilidad alguna de encontrar dónde existe ello? Y ahí se dan dos puntos de vista: como proposición castellana, por ejemplo, la comprendo en tanto puedo explicarla (y fíjate lo lejos que llega mi explicación). Pero ¿qué puedo hacer con ella? Bien, no lo que con una demostración constructiva. Y en tanto que lo que pueda hacer con la proposición sea el criterio de su comprensión, en esa misma medida no está claro *en principio* si la comprendo y hasta qué punto.

Esta es la maldición de la irrupción de la lógica matemática en la matemática: que toda proposición puede presentarse en simbolismo matemático y ello nos hace sentirnos obligados a comprenderla. Aunque ese sistema de notación sea sólo una traducción de la vaga prosa corriente.

47. Un concepto no es esencialmente un predicado[3]. Es verdad que a veces decimos: «Este objeto no es una botella», pero no es en absoluto esencial al juego de lenguaje con el concepto 'botella' el que se emitan en él tales juicios. Presta atención, más bien, a cómo una palabra conceptual (por ejemplo, «baldosas») se usa en un juego de lenguaje.

Por ejemplo, no se necesitaría que hubiera ninguna proposición como «esto es una baldosa»; sino sólo ésta, tal vez: «he ahí una baldosa».

48. La 'lógica matemática' ha deformado totalmente el pensamiento de matemáticos y filósofos, por cuanto, como análisis de las estructuras de los hechos, instauró una interpreta-

---

[3] Cfr. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 65n: «El concepto es para mí un predicado posible...»; también: *Grundgesetze der Arithmetik*, II, p. 69: «Una definición de un concepto (predicado posible) ha de ser completa...». (*Nota de los editores.*)

ción superficial de las formas de nuestro lenguaje corriente. Lo único que ha hecho a este respecto, ciertamente, es haber seguido edificando sobre la lógica aristotélica.

49. Claro que es verdad: el signo numérico pertenece a un signo conceptual y sólo con él es, por así decirlo, un baremo.

50. Si miras en la boca de ese ratón verás dos largos incisivos.—¿Cómo lo sabes?—Sé que todos los ratones los tienen, así pues también ése. (Y no se dice: «Y este objeto es un ratón, así pues también él...») ¿Por qué es esto un movimiento tan importante? Bueno, investigamos, por ejemplo, animales, plantas, etc., formamos juicios generales y los aplicamos en casos concretos.—¡Y, sin embargo, es verdad que ese ratón tiene esa propiedad *si todos* los ratones la tienen! Esta es una determinación sobre la aplicación de la palabra «todos». La generalidad fáctica está en otra parte. Por ejemplo, en el ocurrir general de aquel método de investigación y su aplicación.

O: «Este hombre es un estudiante de matemáticas.» ¿Cómo lo sabes?—«Todas las personas en esta habitación son matemáticos; sólo se ha admitido a tales.»

Lo interesante de la generalidad es que a menudo contamos con un medio de convencernos de una proposición general, antes de tomar en consideración casos particulares: y que, entonces, juzgamos del caso particular por mediación del método general.

Hemos dado al portero la orden de dejar entrar sólo a gente con invitación y contamos con que esa persona que ha sido admitida tenga la suya.

Lo interesante de la generalidad en la proposición lógica no es el hecho que parece expresar, sino la situación siempre recurrente en la que se realiza ese tránsito.

51. Si se dice de la demostración que muestra *cómo*, por ejemplo, 25 × 25 dan 625, entonces se trata de un curioso modo de hablar, ya que el resultado matemático no es un proceso temporal. Pero la demostración, es verdad, tampoco muestra un proceso.

Imagina una secuencia de imágenes. Muestran cómo dos personas practican con espadas de esgrima siguiendo tales y tales reglas. Una secuencia de imágenes puede mostrar eso, ciertamente. Aquí la imagen remite a una realidad. No puede decirse que muestra *que* se esgrime así, sino *cómo* se esgrime. En otro sentido puede decirse que las imágenes muestran cómo en tres movimientos puede pasarse de esa situación a esa otra. Y entonces muestran también *que* de ese modo puede pasarse a esa situación.

52. El filósofo ha de virar y moverse de modo que eluda los problemas matemáticos, que no se tope con alguno, que haya de solucionar antes de poder seguir adelante.

Su trabajo en filosofía es, por así decirlo, holgazanería en matemática.

No hay que erigir un nuevo edificio, o construir un nuevo puente, sino describir la geografía *tal como es ahora*.

Vemos, sí, trozos de los conceptos, pero no vemos claramente los declives que permiten que unos pasen a otros.

Por eso no ayuda nada en la filosofía de la matemática refundir demostraciones en formas nuevas. Aunque exista una fuerte tentación a hacerlo.

También hace 500 años podía haber una filosofía de la matemática, de lo que entonces era matemática.

53. El filósofo es aquel que ha de curar en sí mismo muchas enfermedades del entendimiento antes de que pueda llegar a las nociones del sentido común[4].

[4] En la primera edición de 1956 seguían aquí estas palabras: «Si en la vida estamos rodeados por la muerte, también en la salud del entendimiento, por la locura». Pero resulta dudoso que estas palabras tengan que ver con las precedentes. Por eso nos parece más oportuno separarlas del texto arriba impreso. (*Nota de los editores.*)

PARTE VI

Circa 1943-1944

1. Las demostraciones ordenan las proposiciones. Les dan cohesión.

2. El concepto de un test formal presupone el concepto de una regla de transformación y, por tanto, de una técnica.

Pues sólo mediante una técnica podemos *concebir* una regularidad.

La técnica está fuera de la imagen de la demostración. Podría tenerse una visión exacta de la demostración y no entenderla, sin embargo, como transformación según esas reglas.

Alguien seguramente llamará un test formal de los signos numéricos a la adición de los números... para ver si dan 1.000. Pero *sólo* si la adición es una técnica practicada. Pues ¿cómo, si no, podría llamarse el proceso un tipo cualquier de test?

La demostración es un test formal sólo dentro de un *técnica* de transformación.

Cuando preguntas con qué derecho pronuncias esa regla, la respuesta es la demostración.

¿Con qué derecho dices eso? ¿Con *qué* derecho dices eso?

¿Cómo verificas una propiedad contrapuntística de un tema musical? Lo transformas de acuerdo a *esa* regla, lo confrontas *así* con otro; y cosas parecidas. Así consigues un resultado determinado. Lo consigues como lo conseguirías también mediante un experimento. Hasta ese punto podría ser también un experimento lo que haces. La palabra «consigues» viene usada aquí temporalmente; conseguiste el resultado a las 3.—En la proposición matemática que construyo después el verbo («consigue», «produce», etc.) está usado intemporalmente.

La actividad de verificar produjo tal y tal resultado.

El text era hasta ahora experimental, por así decirlo. Ahora se le concibe como demostración. Y la demostración es la *imagen* de un test.

La demostración está en el trasfondo de la proposición, igual que la aplicación. Tiene que ver también con la aplicación.

La demostración es el camino del test.

El test es formal sólo en tanto concebimos el resultado como resultado de una proposición formal.

3. Y si esa imagen justifica la predicción, esto es, si sólo necesitas mirarla para convencerte de que un proceso sucederá de

tal y tal forma, entonces esa imagen justifica también, naturalmente, la regla. En ese caso la demostración está tras la regla, como una imagen que la justifica.

¿Por qué la imagen del movimiento del mecanismo justifica la creencia de que ese tipo de mecanismo siempre ejecutaría *ese* movimiento?—Proporciona a nuestra creencia una dirección determinada.

Cuando la proposición no parece que sea correcta en su aplicación, la demostración tiene que mostrarme, sin embargo, por qué y cómo *ha de* ser correcta, *cómo* puedo reconciliarla con la experiencia.

La demostración es también, pues, una instrucción para el uso de una regla.

4. ¿Cómo justifica la demostración a la regla?—Muestra cómo y, por tanto, por qué puede ser usada.

El alfil del rey nos muestra *cómo* 8×9 da 72; pero ahí la regla del contar no está reconocida como regla.

El alfil del rey nos muestra *que* 8×9 da 72: Ahora reconocemos la regla.

O quizá hubiera de decir: el alfil del rey me muestra cómo 8×9 *puede* dar 72; es decir, me muestra *un* modo.

El procedimiento me muestra un cómo del resultado.

Que $8 \times 9 = 72$ sea una regla no quiere decir, naturalmente, que alguien me muestre *cómo* $8 \times 9 = 72$; a no ser que ello

significara: alguien me muestra un proceder por cuya visión uno se dirige a esa regla.

¿Y no es el repaso de toda demostración un proceso así?

¿Significaría algo decir: «Quiero mostrarte cómo 8 × 9 dio primero 72»?

5. ¡Lo extraño es que sea la imagen, y no la realidad, la que haya de poder demostrar una proposición! Como si aquí la imagen misma tomara el papel de la realidad.—Pero no es así, ciertamente: puesto que de la imagen sólo derivo una regla. Y ésta no tiene con la imagen la misma relación que la proposición empírica con la realidad.—La imagen no muestra, naturalmente, que sucede tal y tal cosa. Sólo muestra que lo que sucede puede concebirse *así*.

La demostración muestra cómo se procede de acuerdo con la regla, sin tropiezos.

Así pues, también puede decirse: que el procedimiento, la demostración, me muestra de qué modo 8 × 9 = 72.

La imagen no me muestra, naturalmente, que algo sucede, pero sí que suceda lo que suceda se podrá mirar así.

Se nos empuja a aplicar esta técnica en este caso. Se me empuja y *en la misma medida* se me convence de algo.

Mira, así 3 y 2 dan 5. Fíjate en este procedimiento. «Al hacerlo te fijas también inmediatamente en la regla.»

6. La demostración euclídea de la infinitud de la serie de los números primos podría llevarse de tal modo que la investigación de los números entre p y $p!+1$ se presentara en uno o varios ejemplos y se nos enseñara así una técnica de investigación. La fuerza de la demostración no residiría entonces, naturalmente, en encontrar un número primo $>p$ en *ese* ejemplo, Y esto resulta, a primera vista, extraño.

Se dirá, entonces, que la demostración algebraica es más estricta que la que se hace mediante ejemplos, porque es, por decirlo así, el extracto del principio efectivo de esos ejemplos. Pero también la demostración algebraica lleva *una* vestimenta. ¡Comprender —yo diría—, hay que comprender a ambas!

La demostración nos enseña una técnica para encontrar un número primo entre p y $p!+1$. Y nos convencemos de que esa técnica siempre ha de llevar a un número primo $>p$. O de que nos hemos equivocado si no lo hace.

¿Se vería uno empujado a decir aquí que la demostración nos muestra *cómo* hay una serie infinita de números primos? Bueno, se podría decir eso. Y en cualquier caso: «hasta qué punto hay infinitos números primos». Podría uno imaginarse, en verdad, que tuviéramos una demostración que, si bien nos determinara a decir que hay infinitos números primos, no nos enseñara, sin embargo, a hallar un número primo $>p$.

Entonces diríamos, quizá: «Estas dos demostraciones demuestran, pues, a pesar de todo, la misma proposición, el mismo hecho matemático.» Podría existir motivo o no para decir esto.

7. El espectador ve la escena entera, impresionante. Y se le convence de algo: pues ésta es, ciertamente, la particular impresión que él recibe. Sale del espectáculo convencido de algo. Convencido de que con otros números (por ejemplo) llegará al mismo fin. Estará preparado a expresar de tal y tal modo aquello de lo que fue convencido. ¿Convencido de qué? ¿De un hecho psicológico?

Dirá que ha sacado una conclusión de lo que ha visto.— Pero *no* como si la hubiera sacado de un experimento. (Piensa en la división periódica.)

¿Podría él decir: «Lo que he visto fue muy impresionante. Saqué una conclusión de ello. En el futuro...»?

(Por ejemplo: en el futuro siempre calcularé *así*.)
El nos cuenta: «He visto que eso tiene que ser así.»

«Me he dado cuenta de que eso tiene que ser así», ése será su informe.

Y hará que pase entonces por su espíritu el proceso demostrativo.

Pero no dice: Me he dado cuenta de que sucede *eso*. Sino: de que eso tiene que ser así. Ese «tiene que» muestra qué tipo de lección ha sacado de la escena.
El «tiene que» muestra que él ha hecho un círculo.

Me decido a mirar *así* las cosas. También, por tanto, a actuar *así* y *así*.

Me imagino que quien ve lo ocurrido saca de ello incluso una moral.

'Eso tiene que ser así' significa que a esa salida se la consideró esencial al proceso.

8. Ese tener-que muestra que él ha adoptado un concepto.

Ese tener-que significa que él ha entrado en un círculo.

En lugar de una proposición científico-natural ha sacado del proceso una determinación conceptual.

Concepto significa aquí método. En contraposición a la aplicación del método.

9. Mira, *así* 50 y 50 dan 100. Por ejemplo, se ha sumado 10 cinco veces sucesivamente a 50. Y se sigue el incremento de la cifra hasta que llega a 100. Aquí, naturalmente, el proceso observado sería un proceso de cálculo de algún modo (en el ábaco, por ejemplo), una demostración.

La significación del «*así*» no es, naturalmente, que la proposición «50+50=100» diga: esto sucede en alguna parte. Así pues, no es como cuando digo: «¿Ves?, así galopa un caballo», y le muestro imágenes.

Podría decirse, sin embargo: «¿Ves?, *por eso* digo que '50+50=100'.»

O: «¿Ves?, *así* se consigue que 50+50=100.»

Pero si digo ahora: «Mira, *así* resulta 5 de 3+2», y coloco al mismo tiempo sobre la mesa 3 manzanas y luego otras 2, entonces lo que quiero decir es, por ejemplo: 3 manzanas y 2 manzanas hacen 5 manzanas, si no desaparece ni se añade alguna.—O también podría decirse a alguien: Si (como yo ahora) colocas sobre la mesa 3 manzanas y luego otras 2, sucede casi siempre lo que ves ahora, y quedan ahí 5 manzanas.

Quiero mostrarle, por ejemplo, que 3 manzanas y 2 manzanas no dan 5 manzanas *así* como podrían dar 6 manzanas (si apareciera una más de repente, por ejemplo). Esto es propiamente una explicación, una definición de la operación de la suma. Así podría explicarse realmente el sumar con el ábaco.

«Si añadimos 2 cosas a 3 cosas, de ahí pueden resultar diferentes cantidades de cosas. Pero consideramos como *norma* el proceso de que 3 cosas y 2 cosas hacen 5 cosas. ¿Ves?, *así* es como resultan 5.»

¿No podría decirse al niño: «Muéstrame cómo 3 y 2 dan 5»? Ante lo cual el niño calcularía en el ábaco 3+2.

Si en la lección de cálculo se preguntara al niño: «¿Cómo resulta 5 de 3+2?»—¿Qué ha de mostrar él? Bueno, evidentemente, ha de reunir 3 bolas y 2 bolas y contarlas (o algo semejante).

¿No podría decirse: «Muéstrame cómo ese tema musical produce un canon»? Y quien así fuera interrogado tendría que demostrar entonces que hay un canon.—Se preguntaría «*cómo*» a alguien a quien se quiere dejar que muestre que entiende siquiera de qué va el asunto en este caso.

Y si el niño muestra ahora cómo 3 y 2 dan 5, muestra un procedimiento que puede ser considerado como fundamento de la regla «2+3=5».

10. Y si se demanda al alumno: «Muéstrame cómo es que hay infinitos números primos.»—¡Ahí la gramática es dudosa! Resultaría aceptable decir, sin embargo: «Muéstrame hasta qué punto puede decirse que hay infinitos números primos.»

Cuando se dice: «Muéstrame que...», la cuestión de *si*... ya está planteada y sólo resta ya decir «sí» o «no». Si se dice «muéstrame *cómo*...», entonces hay que explicar primero el juego de lenguaje en general. En todo caso, no se tiene aún un concepto *claro* de qué va siquiera esa afirmación. (Alguien pregunta, por así decirlo: «¿Cómo puede justificarse siquiera esa afirmación?»)

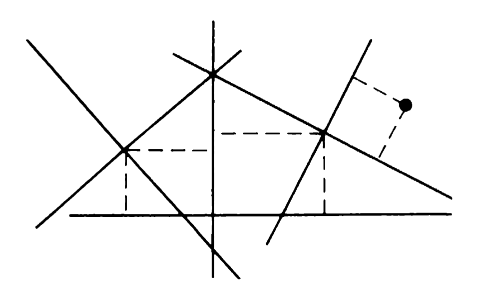
¿He de dar, entonces, a la cuestión: «Muéstrame *cómo*...» otra respuesta que a la cuestión: «Muéstrame que...»?

Derivas de la demostración una teoría. Si derivas de la demostración una teoría, su sentido ha de ser independiente de la demostración; puesto que, si no, nunca podría haberse podido separar de la demostración.
De modo semejante, puedo hacer desaparecer las líneas de construcción en un dibujo y dejar todo lo demás.

Es, pues, como si la demostración no determinara el sentido de la proposición demostrada; y también como si lo determinara.

Pero ¿no sucede lo mismo con cualquier verificación de cualquier proposición?

11. Creo: Sólo en un contexto amplio puede decirse siquiera que hay infinitos números primos. Esto es: Tiene que existir ya, además, una técnica extendida de cálculo con números primos. Sólo dentro de esa técnica tiene sentido esa proposición. Una demostración de la proposición le asigna a ésta su lugar en el sistema entero de las operaciones de cálculo. Y ese lugar puede describirse, entonces, de más de un modo, ya que en el trasfondo se presupone, *ciertamente*, todo el complicado sistema.



Si tres sistemas de coordenadas, por ejemplo, están coordinados de un modo determinado, puedo, entonces, determinar la situación de un punto con respecto a todos, especificándola con respecto a uno cualquiera.

La demostración de una proposición no menciona, no describe, el sistema completo de cálculo que hay tras la proposición y que le da sentido.

Supón que un adulto inteligente y experimentado ha aprendido sólo los rudimentos del cálculo, por ejemplo, las cuatro operaciones con números hasta 20. También ha aprendido la palabra «números primos». Y que alguien le dijera: Voy a demostrarte que hay infinitos números primos. Y bien ¿cómo puede demostrárselo? Tiene que *enseñarle a calcular*. Esto forma parte aquí de la demostración. Primero tiene que dar sentido, por así decirlo, a la cuestión «¿Hay infinitos números primos?»

12. La filosofía tiene que habérselas con las tentaciones de malentendidos que surgen a *este* nivel del saber. (A otro nivel existen otras, a su vez.) ¡Pero esto no vuelve más fácil el filosofar!

13. ¿No es absurdo decir ahora que no se entiende el sentido del teorema de Fermat?—Bueno, podría responderse: los matemáticos no se sienten *del todo* perplejos ante ese teorema. En cualquier caso, sí intentan encontrar determinados métodos de demostración; y, en tanto que intentan encontrar métodos, *en esa misma medida* entienden la proposición.—Pero ¿es esto correcto? ¿No la *entienden* tan plenamente como es posible entenderla?

Supongamos ahora que, frente a toda expectativa de los matemáticos, se demuestra su contrario. Se muestra, entonces, que no *puede* ser así en absoluto.

Pero, para saber qué dice un teorema como el de Fermat, ¿no necesito saber cuál es el criterio de que el teorema sea verdadero? Y conozco, efectivamente, criterios de la verdad de teoremas *semejantes*, pero no un criterio para la verdad de ese teorema.

¡'Comprender', un concepto vago!

Hay, en primer lugar, algo así como: *creer* comprender una proposición.

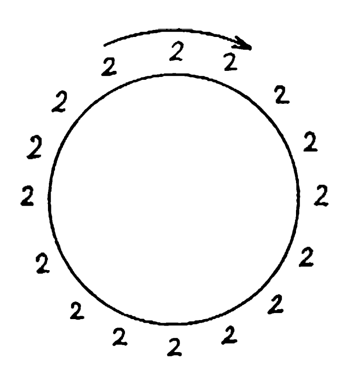
Y si el comprender es un proceso psíquico, ¿por qué ha de interesarnos tanto? A no ser que vaya conectado experiencialmente con la capacidad de hacer uso de la proposición.

«Muéstrame cómo...» quiere decir: muéstrame en qué contexto usas esa proposición (esa parte de la máquina).

14. «Te mostraré cómo hay infinitos números primos» presupone una situación en la que la proposición que dice que hay infinitos números primos no tenía para los otros ningún significado, o sólo el más vago.

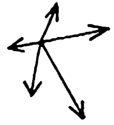
Si este proceso te convence de ello, tiene que ser muy impresionante.—Pero ¿lo es?—No especialmente. ¿Por qué no lo es *más*? Creo que sólo sería impresionante si se le explicara desde su base. Si, por ejemplo, no se limitara uno a escribir $p! + 1$, sino que ello se explicara antes y se ilustrara con ejemplos. Si no se presupusieran, pues, las técnicas como algo obvio, sino que se las presentara antes.

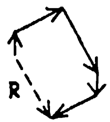
15.



Copiamos el signo «2» hacia la derecha siempre del último escrito. Si copiamos correctamente, el último signo será también una copia del primero.

Un juego de lenguaje:



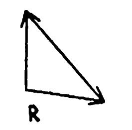


Alguien (A) predice a otro (B) el resultado. El otro sigue las flechas con impaciencia, curioso, por así decirlo, de saber cómo lo conducirán, y se alegra de que finalmente lo lleven al resultado previsto. Reacciona ante ello de modo semejante a como se reacciona, por ejemplo, ante un chiste.

A puede que haya construido de antemano el resultado o que lo haya adivinado solamente. B no sabe nada al respecto, ni le interesa.

Aunque él conocía la regla no la siguió *así* nunca. El *hace* ahora algo *nuevo*. Pero también existe curiosidad y sorpresa cuando ya se ha andado el camino. Así, puede volver y volver a leerse una historia, saberla de memoria incluso, y sorprenderse continuamente, sin embargo, de un determinado giro suyo.

Antes de haber seguido estas dos flechas 

así 

,

no sé cómo será el camino ni los resultados. No sé lo que veré. ¿Es extraño que no la sepa?» ¿Cómo habría de saberlo? ¡Nunca lo he visto! Conozco sólo la regla y la domino, y veo el haz de flechas.

Pero ¿por qué no era una auténtica predicción: «Si sigues la regla conseguirás esto?» Mientras que sí es una auténtica predicción: «Si sigues la regla lo mejor que sepas y puedas, conseguirás...». La respuesta es: lo primero no es una predicción porque yo también podría decir: «Si quieres seguir la regla, *tienes que* producir esto». No se trata de una predicción, por tanto, cuando el concepto del *seguir* una regla está determinado de tal modo que el resultado es el criterio de si se ha seguido la regla.

A dice: «Si sigues la regla conseguirás *esto*», o dice simplemente: «Conseguirás esto.» Y a la vez dibuja la flecha resultante.

¿Fue lo que dijo A una predicción en este juego? ¡Bueno, diablos, en cierto sentido: Sí! ¿No resulta ello claro si suponemos que la predicción era *falsa*? No era una predicción sólo si la *condición* convertía la proposición en pleonasmo.

A podría haber dicho: «Si logras estar de acuerdo con cada uno de tus pasos, lograrás llegar *allí*.»

Supón que mientras que B traza el polígono las flechas del haz mudaran un poco su dirección. B traza siempre una flecha en

paralelo, tal como es en este instante. Se extraña y excita tanto, entonces, como en el juego precedente, a pesar de que aquí el resultado no es el de una operación de cálculo. Ha concebido el primer juego, por tanto, como el segundo.

«Si sigues la regla, llegarás allí» no es una predicción, ya que esa proposición no dice más que: «El resultado de esa operación de cáclulo es...» y ésta es una proposición matemática verdadera, o falsa. La alusión al futuro y a ti sólo es un adorno.

¡¿Ha de tener, pues, A un concepto claro, siquiera, de si su predicción está pensada matemáticamente o de otro modo?! El dice simplemente «Si sigues la regla, resultará...» y disfruta con el juego, digamos. Si, por ejemplo, lo predicho no resulta, no sigue ya investigando.

16. ...Y esta serie viene definida por una regla. O también por el adiestramiento para proceder de acuerdo a la regla. Y la proposición de rigor es, entonces, la que dice que, de acuerdo a esa regla, ese número sigue a ése[1].

Y esa proposición no es una proposición de experiencia. Pero ¿por qué no una proposición de experiencia? Una regla es algo, ciertamente, de acuerdo a lo que procedemos y producimos un signo numérico a partir de otro. ¿No es, por tanto, experiencia que esa regla conduzca a alguien de aquí a allí?

Y si la regla +1 lo lleva una vez de 4 a 5, otra lo llevará, quizá, de 4 a 7. ¿Por qué ha de ser ello imposible?

---

[1] Una corrección y adición a la cuarta frase del § 4, Parte I, dice: «'¿Y no viene ya *definida esa* serie por esa secuencia, justamente?'...» (*supra*, p. 17). En una revisión de aproximadamente el mismo período que lo de arriba aparece: «No por la secuencia; sino por una regla; o por el adiestramiento para el uso de una regla.» (*Nota de los editores.*)

La cuestión es qué tomamos como criterio del proceder según una regla. ¿Es, por ejemplo, un sentimiento de satisfacción que acompaña al acta de proceder según la regla? ¿O una intuición (sugestión), que me dice que he procedido correctamente? ¿O se trata de ciertas consecuencias prácticas del proceder, que determinan si he seguido realmente la regla?—Entonces sería posible que 4+1 diera 5 a veces, y, a veces, otra cosa. Sería *pensable* quiere decir: una investigación experimental mostraría que 4+1 siempre da 5.

Si no ha de ser una proposición de experiencia que la regla lleve de 4 a 5, entonces *eso*, el resultado, ha de ser tomado como criterio de que se ha procedido según la regla.

La verdad de la proposición que dice que 4+1=5 está, por así decirlo, *superdeterminada*. Superdeterminada por el hecho de que el resultado de la operación se estableció como criterio de que esa operación fue llevada a cabo.

La proposición descansa ahora sobre un pie de más para ser proposición de experiencia. Se convierte en una determinación del concepto: 'aplicar la operación +1 a 4'. Y ahora podemos juzgar con nuevo sentido si alguien ha seguido la regla.

Por eso 4+1=5 es ahora ella misma una regla, de acuerdo a la que juzgamos procesos.

Esta regla es el resultado de un proceso que asumimos como *decisivo* para enjuiciar otros procesos. El proceso fundante de la regla es la demostración de la regla.

17. ¿Cómo se describe el proceso de aprender una regla? Siempre que A dé una palmada, B ha de hacer lo mismo.

Recuerda que la descripción de un juego de lenguaje ya es una descripción.

Puedo adiestrar a alguien para una actividad *uniforme*. Por ejemplo, para trazar con lapicero sobre papel una línea así:

– • • – • • – • • – • • – • • – • • – • •

Ahora me pregunto: ¿qué quiero, pues, que él haga? La respuesta es: él ha de continuar procediendo tal como le he enseñado. ¿Y qué quiero decir propiamente con: ha de continuar procediendo? La mejor respuesta que me puedo dar a ello es un ejemplo como el que acabo de ofrecer.

Yo usaría este ejemplo para decirle a él, y a mí mismo, lo que entiendo por uniforme.

Hablamos y actuamos. Eso va presupuesto ya en todo lo que digo.

Le digo: «Así está bien», y esta expresión es portadora de un tono, un gesto. Le dejo hacer. O digo: «¡No!», y lo detengo.

18. ¿Quiere decir esto que 'seguir una regla' es indefinible? No. Puedo, ciertamente, definirlo de incontables maneras. Sólo que, a este respecto, no me valen de nada las definiciones.

19. Podría también enseñarle a comprender una orden de la forma:

(– • •) → o (– • • • • –) →

(El lector adivina lo que quiero decir.)

Y bien, ¿qué quiero que haga? La mejor respuesta que me puedo dar a mí mismo al respecto es cumplir esas órdenes un punto más allá. ¿O crees que una expresión algebraica de esa regla presupondría menos?

Y ahora lo adiestro a seguir la regla

– • – • • – • • • etc.

Y vuelvo a no saber yo mismo lo que quiero de él, más que lo que me muestra el mismo ejemplo. Puedo parafrasear, en efecto, la regla en todo tipo de formas, pero esto sólo la hace más comprensible para quien ya puede seguir esas paráfrasis.

20. He enseñado a alguien a contar y multiplicar en el sistema decimal, por ejemplo.

«365 × 428» es una orden y él la sigue en tanto que realizan la multiplicación.

Insistimos aquí en que al mismo planteamiento siempre le sigue la misma imagen multiplicativa, y también, pues, el mismo resultado. Rechazamos diferentes imágenes multiplicativas con el mismo planteamiento.

Y aparecerá, entonces, la situación de que el que calcula cometa fallos al hacerlo; así como la de que corrija esos fallos.

Otro juego de lenguaje es éste: Se le pregunta: «¿Cuánto es '365 × 428'?». Y ante esa cuestión él puede hacer dos cosas. O realizar la multiplicación, o copiar el resultado de la primera realización, en caso de que ya la hubiera realizado anteriormente.

21. La aplicación del concepto 'seguir una regla' presupone una costumbre. Por eso sería absurdo decir: que una vez en la

historia universal alguien siguió una regla (o una señal de caminos, que jugó un juego, pronunció una frase, o comprendió una; etc.).

Nada resulta más difícil aquí que evitar pleonasmos y decir sólo aquello que realmente describa algo.

Puesto que aquí la tentación de decir algo aún cuando todo está ya descrito, es avasalladora.

Es de la mayor importancia que entre los seres humanos apenas surja nunca una discusión sobre si el color de este objeto es el mismo que el color de aquél; la longitud de esta vara la misma que la longitud de aquélla, etc. Esta pacífica coincidencia es el entorno característico del uso de la palabra «igual».

Y cosas análogas hay que decir del proceder según una regla.

No surge discusión alguna sobre si se ha procedido o no de acuerdo a la regla. Por ejemplo, no se llega a actos de violencia al respecto.

Esto pertenece al armazón desde el que actúa nuestro lenguaje (desde el cual hace una descripción, por ejemplo).

22. Alguien dice ahora que en la serie de números cardinales que obedece a la ley «+ 1», cuya técnica nos fue enseñada de tal y tal modo, 450 sigue a 449. No se trata de la proposición de experiencia que dice que de 449 pasamos a 450 cuando sucede que hemos aplicado a 449 la operación + 1. Más bien se trata de la determinación de que hemos aplicado esa operación sólo cuando el resultado es 450.

Es como si hubiésemos endurecido la proposición de experiencia hasta convertirla en regla. Y lo que nos queda entonces no es una hipótesis verificable por la experiencia, sino un paradigma con el que se confronta y enjuicia la experiencia. O sea, un nuevo tipo de juicio.

Un juicio es, por ejemplo: «El ha calculado 25 × 25, estaba atento y concienciado al hacerlo, y ha conseguido 615»; otro: «Ha calculado 25 × 25 y en lugar de 625 le ha salido 615».

Pero ¡no vienen a lo mismo ambos juicios!

La proposición aritmética no es la proposición empírica: «Si hago *esto*, consigo *esto*» —donde el criterio de que hago *esto* no puede ser lo que resulta de ello.

23. ¿No podríamos imaginar que lo que importara fundamentalmente al multiplicar fuera concentrar el espíritu de un modo determinado, y que, si bien entonces del mismo planteamiento no saliera siempre el mismo resultado, sin embargo, para los problemas prácticos concretos, que queremos solucionar, fueran provechosas precisamente esas diferencias de resultado?

¿No es lo importante que, al *calcular*, el peso fundamental se ponga en si se ha calculado correcta o falsamente, y prescindiendo del estado psíquico, etc., de quien calcula?

Naturalmente, la justificación de la proposición 25 × 25 = 625 es que quien fue adiestrado de tal y tal modo, bajo circunstancias normales obtiene 625 de la multiplicación 25 × 25. Pero la proposición aritmética no expresa *eso*. Es, por así decirlo, una proposición empírica endurecida en regla. Ella establece que sólo se ha seguido la regla cuando es ése el resultado de la multiplicación. Está, por tanto, substraída al control de la experiencia, pero sirve ahora como paradigma para juzgar la experiencia.

Si queremos utilizar prácticamente una operación de cálculo nos convencemos antes de que se ha «calculado correctamente», de que se ha obtenido el resultado *correcto*. Y el resultado correcto de la multiplicación, por ejemplo, sólo puede ser *uno* y no depende de lo que arroje la *aplicación* del cálculo. Juzgamos de los hechos, por tanto, con ayuda del cálculo de modo completamente diferente a como lo haríamos si no consideráramos el resultado del cálculo como algo determinado de una vez por todas.

No empiria y sí realismo en filosofía, eso es lo más difícil. (Frente a Ramsey.)

Respecto a la regla misma, no comprendes más de lo que puedes explicar.

24. «Tengo un determinado concepto de la regla. Si se la sigue en este sentido, sólo puede llegarse de este número a este otro.» Esta es una decisión espontánea.

Pero ¿por qué digo «*tengo que*» si se trata de una decisión mía? Bueno ¿es que no puedo tener que decidirme?

Que se trate de una decisión espontánea, ¿no significa sólo: así actúo; ¡no preguntes los motivos!?

Dices, tienes que; pero no puedes decir qué es lo que te obliga.

Tengo un determinado concepto de la regla. Sé lo que tengo que hacer en cualquier caso particular. Sé, o sea, no dudo: lo tengo claro. Digo: «Obviamente». No puedo ofrecer motivo alguno.

Si digo: «Yo decido espontáneamente», eso no quiere significar, naturalmente: considero qué número sería aquí el mejor y me decido entonces por...

Decimos: «Primero ha de haberse calculado correctamente, después se emitirá un juicio sobre los hechos de la naturaleza.»

25. Alguien ha aprendido la regla de contar en el sistema decimal. Ahora se divierte escribiendo número tras número de la serie «natural» de los números.

O sigue la orden en el juego de lenguaje «Escribe el sucesor del número... en la serie...».—¿Cómo puedo explicar a alguien este juego de lenguaje? Bueno, puedo describir un ejemplo (o ejemplos).—Para ver si ha entendido el juego de lenguaje puedo hacer que calcule con ejemplos.

¿Y si alguien verificara la tabla de multiplicar, las tablas de logaritmos, etc., porque no se fía de ellas? Si obtiene otro resultado, se fía de él y dice que había concentrado su espíritu sobre la regla de tal modo que su resultado tiene que valer como el correcto. Si se le descubre un fallo dice que prefiere dudar de la veracidad de su entendimiento *ahora* y no antes, cuando realizó por primera vez la operación de cálculo.

Podemos suponer como algo dado la coincidencia en todas las cuestiones de cálculo. Pero ¿hay diferencia entre expresar la proposición de cálculo como proposición de experiencia o expresarla como regla?

26. ¿Aceptaríamos la regla $25^2 = 625$ si no llegáramos todos siempre a ese resultado? Bueno, ¿por qué no hemos de poder usar la proposición de experiencia en lugar de la regla?—¿Es ésta la respuesta: Porque lo contrario de la proposición de experiencia no corresponde a lo contrario de la regla?

Si te escribo un trozo de una serie de modo que percibas esa legaliformidad suya, a ello podemos llamarlo un hecho de experiencia, un hecho psicológico. Pero *si* has descubierto esa ley en ella, de modo que prosigues *así* la serie, entonces ya no es un hecho de experiencia.

Pero ¿cómo es que no es un hecho de experiencia: puesto que «descubrir *esto* en ella» no era, ciertamente, lo *mismo* que: continuarla así.

Sólo puede decirse que esto no es un hecho de experiencia si se *define* el paso a ese nivel como el correspondiente a la expresión de la regla.

Dices, pues: «De acuerdo a la regla que *yo* veo en esta secuencia, se prosigue *así.* «No: ¡de acuerdo con la experiencia! Sino que ése es precisamente el sentido de la regla.

Comprendo: Dices «Esto no está de acuerdo con la experiencia» —pero ¿no está, *sin embargo*, de acuerdo con la experiencia?

«De acuerdo con esa regla se procede *así*»: esto es, *das* a esa regla una extensión.

Pero ¿por qué no puedo darle hoy una extensión, mañana, otra?

Bueno, puedo hacerlo. Por ejemplo, podría darle alternativamente una de dos interpretaciones.

27. Una vez que he comprendido una regla estoy ya sujeto a ella en lo que haga. Pero esto sólo significa, naturalmente, que en mis *juicios* estoy sujeto a lo que está de acuerdo con la regla y a lo que no.

Si percibo ahora una regla en la secuencia que se me ha dado, ¿puede consistir ello simplemente, por ejemplo, en que veo ante mí una expresión algebracia? ¿No ha de pertenecer ésta a un lenguaje?

Alguien escribe una secuencia de números. Finalmente digo: «Ahora lo entiendo: siempre he de...». Y esto es, ciertamente, la expresión de la regla. ¡Pero sólo en un lenguaje, ciertamente!

¿Cuándo digo, pues, que veo la regla —o una regla— en esa secuencia? Por ejemplo, cuando puedo hablar conmigo mismo de esa secuencia de un modo determinado. Pero ¿no simplemente cuando puedo continuarla también? No, me explico a mí mismo o a otro, en general, cómo hay que proseguir. Pero ¿no podría dar esa explicación sólo en el espíritu, es decir, sin un lenguaje auténtico?

28. Alguien me pregunta: ¿Cuál es el color de esa flor? Respondo: «rojo».—¿Estás absolutamente seguro? ¡Sí, absolutamente seguro! Pero ¿no puedo haberme confundido y llamar «rojo» al color falso? No. La seguridad con la que llamo «rojo» al color es la rigidez de mi patrón de medida, es la rigidez de la que parto. No puede ponerse en duda en mi descripción. Esto es lo que caracteriza precisamente lo que llamamos describir.

(Por supuesto, puedo admitir aquí una equivocación al hablar, pero no otra cosa.)

El seguimiento de una regla está a la BASE de nuestro juego de lenguaje. Caracteriza lo que llamamos descripción.

La similitud de mi consideración con la teoría de la relatividad está en que es, por así decirlo, una consideración sobre los relojes con los que comparamos los acontecimientos.

¿Es $25^2 = 625$ un hecho de experiencia? Tú dirías: «No». ¿Por qué no?—«Porque, de acuerdo a las reglas, no puede ser de otro modo.»—¿Y por qué eso?—Porque *ése* es el significado de las reglas. Porque ése es el proceso sobre el que construimos todo juicio.

29. Cuando realizamos la multiplicación damos una ley. Pero ¿cuál es la diferencia entre la ley y la proposición empírica que dice que damos esa ley?

Si se me ha enseñado la regla de repetición de este ornamento



y se me dice ahora «¡Continúa así!»: ¿cómo sé lo que tengo que hacer la próxima vez?— Bueno, lo hago con seguridad, y sabré también defenderlo; es decir, hasta un cierto punto. Si esto no ha de ser una defensa, entonces no existe ninguna.

«Tal como yo entiendo la regla, se sigue *esto*.»

Seguir una regla es una actividad humana.

Doy una extensión a la regla.

¿Podría decir: «Mira, si sigo la orden, trazo esta línea?» Bueno, en ciertos casos diré eso. Cuando construyo una curva según una ecuación, por ejemplo.

«¡Mira, si sigo la orden hago *esto*!» Ello, naturalmente, no ha de significar: si sigo la orden, sigo la orden. Así, pues, he de tener otra identificación para ese «esto».

«¡*Esto* es el aspecto, por tanto, que ofrece el seguimiento de esa orden!»

¿Puedo decir: «La experiencia me enseña: cuando concibo *así* la regla he de proseguir *así*»?

No, no puede decirse si reduzco a una misma cosa el concebir-a-sí y el proseguir-así.

Seguir una regla de transformación no es más problemático que seguir la regla: «vuelve a escribir siempre lo mismo». Puesto que la transformación es una especie de igualdad.

30. Podría preguntarse: si todos los seres humanos que han sido educados así, calculan también así, o coinciden, al menos, en que *esa* operación de cálculo es la correcta; ¿para qué se necesita la *ley*?

«$25^2 = 625$» no puede ser la proposición de experiencia que dice que los hombres calculan así, ya que $25^2 \neq 626$ no sería la proposición, entonces, que dice que los seres humanos no obtienen ese resultado, sino otro; y que podría ser verdadera también si los seres humanos no calcularan.

La coincidencia de los seres humanos al calcular no es una coincidencia de opiniones o convicciones.

¿Podría decirse: «Al calcular, las reglas te parecen inexorables; sientes que sólo puedes hacer eso y no otra cosa, si quieres seguir la regla»?

«Tal como yo veo la regla, lo que ella reclama es *esto.*» No depende de mi estado de ánimo.

Siento que he dado una interpretación a la regla antes de haberla seguido; y que esa interpretación es suficiente para *determinar* lo que en un caso concreto tengo que hacer para seguirla.

Cuando concibo la regla tal como lo he hecho, sólo le corresponde *esta* acción.

«¿Has comprendido la regla?»—Sí, la he comprendido.—«¡Entonces aplícala ahora a los números...!»—¿Me queda otra elección si quiero seguirla?

Supongamos que él me ordena seguir la regla y yo temo no obedecerlo: ¿no estoy obligado?

Pero esto también es así cuando me ordena: «Tráeme esa piedra». ¿Me obligan menos estas palabras?

31. ¿Hasta qué punto puede describirse la función del lenguaje? A quien no domina una lengua puedo adiestrarlo para su dominio. A quien la domina puedo recordarle, o describirle, el modo y manera del adiestramiento; para un fin particular: en cuanto que aplico ya una técnica del lenguaje.

¿Hasta qué punto puede describirse la función de la regla? A quien no domina aún ninguna sólo puedo adiestrarlo. Pero ¿cómo puedo explicarme a mí mismo la esencia de la regla?

Lo difícil no es aquí ahondar hasta el fundamento, sino reconocer como fundamento el fundamento que tenemos ahí delante.

Pues el fundamento nos vuelve a crear siempre la imagen ilusoria de una gran profundidad, y cuando intentamos alcanzarla, volvemos a encontrarnos siempre al nivel de antes.

Nuestra enfermedad es la de querer explicar.

«Si posees la regla tienes la ruta ya prefijada.»

32. ¿Qué publicidad es necesaria para que exista un juego, para que pueda inventarse un juego?

¿Qué entorno necesita alguien para poder inventar el ajedrez, por ejemplo?

Es verdad que yo podría inventar hoy un juego de tablero que nunca se jugara realmente. Lo describiría, simplemente. Pero esto es posible sólo porque hay ya juegos semejantes, esto es, porque *se juegan* juegos tales.

Podría preguntarse también: «¿Es posible la regularidad *sin* repetición?»

Puedo establecer hoy, ciertamente, una nueva regla, que nunca ha sido aplicada y, sin embargo, se entiende. Pero ¿resultaría esto posible si *nunca* se hubiera aplicado de hecho una regla?

Y si alguien dice ahora «¿No basta una aplicación imaginaria?» la respuesta es no. (Posibilidad de un lenguaje privado.)

Un juego, un lenguaje, una regla, es una institución.

«¿Con qué frecuencia, sin embargo, ha de haber sido aplicada realmente una regla para que se tenga derecho a hablar de una regla?—¿Con qué frecuencia tiene que haber sumado, multiplicado, dividido alguien, para que se pueda decir que domina la técnica de esas modalidades de cálculo? Y con ello no quiero decir: con qué frecuencia ha tenido que calcular correctamente

para demostrar a *otros* que sabe calcular, sino para demostrárselo a sí mismo.

33. Pero ¿no podríamos imaginar que alguien, sin ningún tipo de adiestramiento, a la vista, simplemente, de un problema de cálculo se encuentre en ese estado anímico que normalmente sólo es resultado del adiestramiento y ejercicio? De modo que sepa que puede calcular, aunque no haya calculado nunca. (Al parecer, pues, es posible decir: el adiestramiento sólo es historia, y sólo es necesario experiencialmente para la producción del saber.)—Pero ¿y si él se encuentra ahora en aquel estado de certeza, y multiplica mal, a pesar de ello? Y supongamos que unas veces multiplica correctamente, y otras, de modo completamente falso.—El adiestramiento puede menospreciarse, en efecto, como mera historia, si él ya calcula *siempre* correctamente. Pero que *puede* calcular es cosa que muestra, no sólo a los demás, sino también a sí mismo, *calculando* correctamente.

Lo que en un entorno complicado llamamos «seguir una regla», no lo llamaríamos así, de encontrarse aislado.

34. El lenguaje, quiero decir, remite a un *modo* de vida.

Para definir el fenómeno del lenguaje hay que describir una praxis, no un proceso extraordinario *del tipo que sea.*

Es muy difícil reconocer esto.

Imaginemos que un Dios crea en un instante en medio del desierto un país que existe dos minutos y que es una reproducción exacta de una parte de Inglaterra con todo lo que en ella sucede en dos minutos. Las personas, exactamente igual que en Inglaterra, se dedican a sus diferentes ocupaciones. Los niños están en la escuela. Algunas personas practican la matemática. Contemplemos ahora la actividad de una persona cualquiera durante esos

dos minutos. Una persona de ésas hace exactamente lo que en Inglaterra hace un matemático que está realizando una operación de cálculo.—¿Diríamos que esa persona-dos-minutos calcula? ¿No podríamos imaginarnos, por ejemplo, un pasado y una continuación de esos dos minutos, que nos permitiera denominar esos procesos de otro modo completamente diferente?

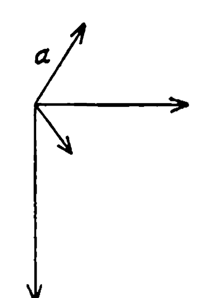
Supongamos que esos seres no hablaran inglés, sino que aparentemente se entendieran en una lengua que no conocemos. ¿Qué motivo tendríamos para decir que hablan un lenguaje? Y, sin embargo, ¿no *podría* considerarse así lo que hacen?

Y supongamos que hicieran algo que nos inclináramos a llamar «calcular»; por ejemplo, porque exteriormente se parece al cálculo.—Pero ¿*es* ello calcular; y lo sabe (digamos) la gente que lo hace, y nosotros no?

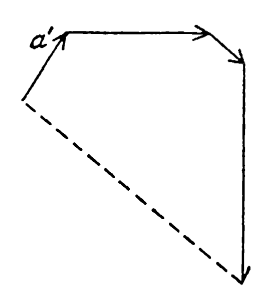
35. ¿Cómo sé que el color que veo ahora se llama «verde»? Bien, para confirmarlo podría preguntar a otras personas; pero si no coincidieran conmigo, me llenaría de confusión y consideraría, quizá, que ellas o yo estamos locos. Esto quiere decir: o bien que ya no me atrevería más a juzgar, o bien que ya no reaccionaría más a lo que dicen como ante un juicio.

Si me estoy ahogando y grito «¡socorro!», ¿cómo sé lo que significa la palabra socorro? Bueno, así reacciono en esa situación. *Así* también sé lo que quiere decir «verde», y también cómo he de seguir la regla en el caso particular.

¿Es *imaginable* que el polígono de fuerzas de



no tenga esta apariencia



sino otra? Bueno ¿es imaginable que la paralela de a no parezca que tiene la dirección de *a'*, sino otra? Esto quiere decir: ¿es imaginable que yo no vea *a'*, sino otra flecha con otra dirección, como paralela de *a*? Bueno, podría imaginarme, por ejemplo, que veo la flecha paralela con una cierta perspectiva y que por eso llamo a ↗ ↑ flechas paralelas; y que no me doy cuenta de que he usado otro tipo de mirada. Y así, *es* imaginable que dibuje otro polígono de fuerzas diferente en correspondencia a las flechas.

36. ¿Qué clase de proposición es ésta: «la palabra 'OBEN' tiene cuatro sonidos»?
¿Es una proposición de experiencia?

No lo sabemos antes de contar las letras.

Quien cuenta las letras de la palabra 'OBEN' para saber cuántos sonidos tiene la secuencia que así suena, hace lo mismo que el que cuenta para saber cuántas letras tiene la palabra escrita en tal y tal sitio. El primero hace, pues, algo que podría ser también un experimento. Y esto podría ser el motivo para llamar sintética *a priori* a la proposición que dice que 'OBEN' tiene 4 letras.

La palabra «Plato» tiene tantos fonemas como ángulos la estrella de David. ¿Es ésta una proposición de la lógica?—¿Es una proposición de experiencia?

¿Es un experimento el contar? *Puede* serlo.

Imagínate un juego de lenguaje en el que alguien tenga que contar los sonidos de las palabras. Podría suceder, entonces, que aparentemente una palabra tuviera siempre la misma sonoridad, aunque si contáramos sus sonidos obtendríamos diferente número de ellos en ocasiones diferentes. Podría suceder, por ejemplo, que nos pareciera que una palabra suena igual en contextos diferentes (debido a una ilusión acústica, por así decirlo), y que la diferencia se manifestara, sin embargo, al contar los sonidos. En tal caso, contaremos siempre, pongamos, los sonidos de una palabra en ocasiones diferentes, y esto se convertirá en una especie de experimento.

Pero, por otro lado, puede suceder que contemos de una vez por todas los sonidos de las palabras, que hagamos una operación de cálculo, y apliquemos el resultado de ese recuento.

La proposición resultante será temporal en el primer caso, intemporal en el segundo.

Si cuento los fonemas de la palabra «Dädalus», puedo considerar como resultado dos cosas diferentes: 1) La palabra que está ahí (o que tiene ese aspecto, o que ha sido pronunciada ahora, o que, etc.) tiene 7 fonemas. 2) La imagen sonora «Dädalus» tiene 7 fonemas.

La segunda proposición es intemporal.

El uso de ambas proposiciones ha de ser diferente.

El *contar* es en ambos casos *el mismo*. Sólo es diferente lo que obtenemos con él.

La atemporalidad de la segunda proposición no es un resultado del contar, pongamos, sino de la decisión de usar de un modo concreto el resultado del contar.

En alemán la palabra «Dädalus» tiene 7 fonemas. Esto es una proposición de experiencia, sin embargo.

Imagina que alguien cuenta los sonidos de las palabras para encontrar o para verificar una ley, por ejemplo, del desarrollo del lenguaje. Dice: «'Dädalus' tiene 7 fonemas». Esto es una proposición de experiencia. Repara aquí en la *identidad* de la palabra. La misma palabra puede tener este número de sonidos unas veces, y otras veces, otro.

Digo ahora a alguien: «¡Cuenta los sonidos en esas palabras y escribe el número de cada una!»

Quisiera decir: «Contando los sonidos puede conseguirse una proposición de experiencia, pero también una regla.»

Decir: «La palabra... tiene... sonidos en sentido atemporal» es una determinación con respecto a la identidad del concepto 'La palabra...'. De ahí la atemporalidad.

En lugar de «La palabra... tiene... sonidos, en sentido atemporal», podría decirse también: «La palabra... tiene *esencialmente*... sonidos.»

37.

$$p/p \cdot / \cdot q/q = p \cdot q$$
$$p/q \cdot / \cdot p/q = p \vee q$$
$$x/y \cdot / \cdot z/u \overset{\text{Def}}{=} //(x, y, z, u)$$

Las definiciones no necesitan en absoluto ser abreviaturas; podrían hacer de otro modo nuevas conexiones. Mediante paréntesis, por ejemplo, o también mediante el uso de signos de diferentes colores.

Puedo demostrar una proposición, por ejemplo, indicando mediante colores que tiene la forma de uno de mis axiomas. aunque alargado por medio de una sustitución determinada.

38. «Sé cómo he de ir» quiere decir: no dudo de cómo he de ir.

«¿Cómo puede seguirse una regla?» Así es como me gustaría preguntar.

Pero ¿cómo es que quiero preguntar eso, si no encuentro ningún tipo de dificultades en seguir una regla?

Obviamente, aquí malentendemos los hechos que tenemos ante los ojos.

¿Cómo puede indicarme la palabra «baldosa» lo que he de hacer, si puedo conciliar cualquier acción con cualquier interpretación?

¿Cómo puedo seguir una regla, si, haga lo que haga, siempre puede interpretarse como un seguir?

¿Qué tengo que saber para poder cumplir una orden? ¿Hay un *saber* que hace que la regla sólo puede cumplirse *así*? A veces he de *saber* algo, *a veces* he de *interpretar* la regla antes de aplicarla.

¿Cómo fue posible, entonces, dar a la regla durante el aprendizaje una interpretación que alcanzara hasta un nivel discrecional?

Y si no se mencionó ese nivel en la explicación, ¿cómo podemos estar de acuerdo en lo que ha de suceder a ese nivel, dado que, suceda lo que suceda, siempre puede conciliarse con la regla y los ejemplos?

Así pues, según dices, no se ha dicho nada concreto sobre esos niveles.

La interpretación tiene un final.

39. Es verdad que todo se puede justificar de algún modo. Pero el fenómeno del lenguaje se funda en la regularidad, en la coincidencia en el obrar.

Es aquí de la mayor importancia que todos nosotros, o la inmensa mayoría, coincidamos en ciertas cosas. Puedo estar completamente seguro, por ejemplo, de que la mayoría de los seres humanos que vean este objeto llamarán 'verde' su color.

Sería imaginable que seres humanos de tribus diferentes poseyeran lenguajes con el mismo vocabulario, pero diferentes significados de las palabras. La palabra que en una tribu significa verde, significa en el lenguaje de otra lo mismo, en la tercera significa mesa, etc. Podríamos, incluso, imaginar que las tribus usaran las mismas proposiciones, sólo que con un sentido totalmente diferente.

Bueno, en ese caso no diría que hablan el mismo lenguaje.

Decimos que los seres humanos, para entenderse unos con otros, tendrían que coincidir en los significados de las palabras. Pero el criterio para esa coincidencia no es sólo una coincidencia respecto a las definiciones, por ejemplo, respecto a las definiciones ostensivas, sino *también* una coincidencia en los juicios. Para el mutuo entendimiento es esencial que coincidamos en un gran número de juicios.

40. El juego de lenguaje (2)[2], ¿cómo puedo explicarlo a alguien, o a mí mismo? Siempre que A exclama: «losa», B trae *ese*

---

[2] § 2 de las *Philosophische Untersuchungen*. Un lenguaje imaginario 'ha de servir para el entendimiento de un albañil A con un peón B. A construye un edificio con piezas de sillería; hay cubos, pilares, baldosas y vigas. B ha de alcanzarle las piezas, y en el orden en que A las necesita. Para ese fin se sirven de un lenguaje que consiste en estas palabras: «cubo», «pilar», «baldosa», «viga». A *los nombra en voz alta;* B trae la pieza que ha aprendido a traer ante esa exclamación. ¡Concibe esto como un lenguaje primitivo completo!'. (*Nota de los editores.*)

tipo de objeto.—Yo podría preguntar también: ¿cómo puedo *yo* entenderlo? Bueno, *sólo* en tanto en cuanto puedo explicarlo.

Existe aquí, sin embargo, una tentación peculiar, que se manifiesta en mi inclinación a decir: No puedo entenderlo porque la interpretación de la explicación queda vaga.

Es decir, sólo puedo darte y darme a mí mismo ejemplos del uso.

41. La palabra «coincidencia» y la palabra «regla» están *emparentadas*, son primas hermanas. El fenómeno del coincidir y el del actuar de acuerdo a una regla tienen que ver uno con otro.

Podría existir un cavernícola que produjera para sí mismo secuencias *regulares* de signos. Se entretendría, por ejemplo, en dibujar en la pared de la cueva

— · — — · — — · — — ·

o

— · — · · — · · · — · · · · —

Pero no sigue la expresión general de una regla. Y no decimos que actúe regularmente porque podamos formar una expresión tal.

Pero ¡y si desarrollara π! (Sin una expresión general de la regla, quiero decir.)

Sólo en la praxis de un lenguaje puede tener significado una palabra.

Ciertamente, puedo darme a mí mismo una regla y seguirla después. Pero ¿no se trata de una regla sólo porque es análoga a lo que en el trato humano significa 'regla'?

Cuando un tordo repite en su canto siempre la misma frase varias veces, ¿decimos, quizá, que se da cada vez una regla, que después sigue?

42. Consideremos reglas muy simples. Sea la expresión de la regla una figura como ésta:

|--|

que se sigue dibujando una fila recta de tales figuras (como ornamento, por ejemplo.)

|--||--||--||--||--|

¿Bajo qué circunstancias diríamos: que alguien establece una regla escribiendo una de tales figuras? ¿Bajo qué circunstancias: alguien sigue esa regla dibujando aquella fila? Es difícil describirlo.

Si, de una pareja de chimpancés, uno hiciera una vez con arañazos sobre el suelo la figura |--| y otro, a continuación, la serie |--||--| etc., no por ello el primero habría establecido una regla y el segundo la habría seguido, aconteciera lo que fuese, al hacerlo, en el alma de ambos.

Pero si se observara, por ejemplo, el fenómeno de un tipo de lección, en la que primero se hacen y luego se copian ensayos, con éxito o sin él, con recompensa o castigo y cosas semejantes; si, al final, el así adiestrado colocara, una al lado de otra como en el primer ejemplo, figuras que hasta entonces no había visto, diríamos, ciertamente, que uno de los chimpancés escribe reglas, y el otro las sigue.

43. Pero ¿y si ya la primera vez uno de los chimpancés se hubiera *propuesto* repetir ese proceso? Sólo en una determinada técnica del obrar, hablar, pensar, puede alguien proponerse algo. (Este 'puede' es el gramatical.)

Es posible inventar hoy un juego de cartas al que nunca se juegue. Pero ello no quiere decir: en la historia de la humanidad sólo una vez se inventó un juego y nadie lo ha jugado. Esto no significa nada. No porque contradiga leyes psicológicas. Las palabras «inventar un juego», «jugar un juego» sólo tienen sentido en un contexto completamente determinado.

Así, tampoco puede decirse que sólo una vez en la historia de la humanidad se ha seguido una señal de caminos. Pero sí: una única vez en la historia de la humanidad alguien ha caminado paralelo a una tabla. Y aquella primera imposibilidad no es, nuevamente, una psicológica.

La palabras «lenguaje», «proposición», «orden», «regla», «operación de cálculo», «experimento», «seguir una regla» remiten a una técnica, a una costumbre.

Un paso previo al actuar según una regla sería, por ejemplo, el gusto por regularidades simples, como el golpetear ritmos sencillos o dibujar o contemplar ornamentos sencillos. Así pues, se podría adiestrar a alguien a seguir la orden: «dibuja algo regular», «golpetea regularmente». Y aquí hay que volver a representarse una técnica determinada.

Tienes que preguntarte: Bajo qué circunstancias especiales decimos que alguien «se equivocó simplemente al escribir», o que «tenía que haber continuado, pero no lo hizo deliberadamente», o que «quería repetir la figura que había dibujado, pero no llegó a hacerlo».

El concepto de «golpeteo regular», «figura regular» se nos inculca de igual modo que 'claro', 'sucio' o 'multicolor'.

44. Pero ¿no somos conducidos por la regla? ¿Y cómo puede ella conducirnos, dado que su expresión puede ser interpretada por nosotros de este modo y de otro?; es decir, dado que le corresponden diferentes regularidades. Bueno, nos inclinamos a decir que una expresión de la regla nos conduce, nos inclinamos, pues, a usar esa metáfora.

¿Cuál es la diferencia ahora entre el proceso de derivar número a número, siguiendo la serie, de acuerdo a una regla (a una expresión algebraica por ejemplo) y este proceso: Cuando mostramos a alguien un signo determinado, éste , por ejemplo, se le ocurre una cifra; si mira a la cifra y al signo, vuelve a ocurrírsele otra cifra, y así sucesivamente? Y cada vez que emprendemos este experimento se le ocurre la misma serie de cifras. ¿Es la diferencia entre este proceso y el proceder según la regla, la psicológica de que en el segundo caso tuvo lugar una ocurrencia? ¿No podría yo decir: Si él siguiera la regla «|−−|», volvería a ocurrírsele siempre «|−−|»?

Bueno, en nuestro caso tenemos, ciertamente, intuición, y se dice que la intuición está a la base del actuar según una regla.

Supongamos, pues, que aquel signo mágico, por así decirlo, produjera la serie 123123123, etc.: ¿no es, *entonces*, el signo la expresión de una regla? No.

El actuar de acuerdo a una regla presupone el reconocimiento de una *uniformidad* y el signo «123123123, etc.», era la expresión natural de una uniformidad.

Ahora quizá se diga que | 22 || 22 || 22 | es, efectivamente, una secuencia uniforme de cifras, pero no

| 2 || 22 || 222 || 2222 |

Bueno, podría llamar a este último otro tipo de uniformidad.

45. ¿Y si existiera una tribu, cuyas gentes, aparentemente, tuvieran comprensión para un tipo de regularidad, que yo no comprendo. Habría entre ellas también un aprendizaje, una instrucción análoga en todo a la de § 42. Si se las contempla, se diría que siguen reglas, que aprenden a seguir reglas. La instrucción produce, por ejemplo, coincidencia en la acción entre alumnos y profesor. Aunque si miramos una de sus series de figuras no vemos ningún tipo de regularidad.

¿Qué habríamos de decir entonces? *Podríamos* decir: «Parece que siguen una regla que se nos escapa»; pero también: «Aquí tenemos un fenómeno del comportamiento de seres humanos, que no entendemos.»

La instrucción para actuar según la regla puede describirse sin emplear la expresión «y así sucesivamente».

Pero en esa descripción sí puede describirse un gesto, un tono de voz, un signo, que el maestro usa de determinado modo en la lección y que los alumnos imitan. También puede describirse el efecto de esas expresiones, otra vez sin ayuda del «y así sucesivamente», o sea finitamente. El efecto del «y así sucesivamente» será producir coincidencia más allá de la instrucción. Resulta así que todos o casi todos contamos igual y calculamos igual.

Pero también podría imaginarse la enseñanza sin el «y así sucesivamente». Y que la gente, cuando saliera de la escuela, calculara toda ella igual, sin embargo, más allá de los ejemplos de la lección.

Pero ¿y si un día la instrucción no produjera ya coincidencia?

¿Podría haber aritmética sin la coincidencia de los que calculan?

¿Podría calcular un hombre solo? ¿Podría uno solo seguir una regla?

Son esas preguntas semejantes, por ejemplo, a ésta: «¿Puede alguien practicar él solo el comercio?»

Sólo tiene sentido, por tanto, decir «y así sucesivamente», cuando se *entiende* «y así sucesivamente». Esto es, cuando el otro puede proseguir igual que yo, esto es, prosigue igual que yo.

¿Podrían dos personas practicar el comercio entre ellas?

46. Cuando digo: «Si sigues la regla *tiene que* resultar esto», ello no significa: tiene que resultar, porque siempre ha resultado; sino: que resulte, es uno de mis *fundamentos*.

Lo que *tiene que* resultar es un fundamento de juicio, que yo no toco.

¿En qué ocasión se dirá: «Si sigues la regla *tiene que* resultar esto»?

Puede tratarse de una explicación matemática respecto a una demostración de que un determinado camino tiene una bifurcación. Puede ser también que se le diga a alguien para inculcarle la esencia de la regla, para decirle, por ejemplo: «Con esto no haces ningún experimento».

47. «A cada paso sé absolutamente lo que tengo que hacer; lo que me exige la regla.» La regla, tal como yo la concibo. No me hago estas ni aquellas consideraciones. La imagen de la regla clarifica cómo hay que proseguir la imagen de la serie.

«A cada paso sé lo que tengo que hacer. Lo veo claramente ante mí. Puede que sea aburrido, pero no hay duda de lo que tengo que hacer.»

¿De dónde esa seguridad? Pero ¿por qué pregunto eso? ¿No basta que exista esa seguridad? ¿Para qué he de buscar una fuente de ella? (Y, ciertamente, puedo indicar *causas* de ella.)

Si alguien, a quien tememos desobedecer, nos ordena seguir la regla..., que entendemos, entonces escribiremos número tras número sin ninguna vacilación. Y éste es un modo típico de cómo reaccionamos ante una regla.

«Ya sabes cómo es esto». «Ya sabes cómo sigue.»

Puedo determinarme ahora a seguir la regla (–·–)→.

Así: –·––·––·––·–

Pero es curioso que no pierda, al hacerlo, el significado de la regla. Pues ¿cómo lo retengo?

Pero ¿cómo sé que lo retengo, que no lo pierdo? No tiene ningún sentido decir que lo retengo si no hay ninguna señal externa de ello. (Si yo cayera por el espacio, podría sujetar algo, pero no sujetarlo inmóvil.)

El lenguaje es justamente un fenómeno de la vida humana.

48. Uno hace un movimiento de mano imperioso, como si quisiera decir «¡Vete!». El otro, con expresión temerosa, se marcha de puntillas. ¿No podría llamar «mandar y obedecer» a este incidente, aunque sólo sucediera una vez?

¿Qué ha de querer decir: «Podría llamar... a este incidente»? Naturalmente, podría objetarse a cualquier denominación que

sería perfectamente imaginable que en otros seres humanos, diferentes de nosotros, al «¡sal de aquí!» le correspondiera otro gesto completamente diferente, que nuestro gesto ante esa orden, por ejemplo, tuviera para ellos el significado de nuestro dar la mano como signo de amistad. Y la interpretación que haya que dar a un gesto, dependería de otras acciones que preceden o anteceden al gesto.

El modo como empleamos las palabras «mandar» y «obedecer» indica que los gestos, igual que las palabras, están entrelazados en una red de múltiples relaciones. Si construyo un caso simplificado, no está claro entonces si he de llamar aún «mandar» y «obedecer» al fenómeno.

Llegamos a una tribu desconocida, cuyo lenguaje no entendemos. ¿Bajo qué circunstancias diremos que tienen un jefe? ¿Qué nos llevará a decir que ése es el jefe, aunque vaya vestido más pobremente que otros? ¿Es indispensable que sea el jefe aquel a quien los demás obedecen?

¿Cuál es la diferencia entre inferir falsamente y no inferir? ¿Entre sumar falsamente y no sumar? Piensa en ello.

49. Lo que dices parece venir a que la lógica pertenece a la historia natural del ser humano. Y esto no es compatible con la dureza de la «necesidad» lógica.

Pero la «necesidad» lógica es un componente de las proposiciones de la lógica, y éstas *no* son proposiciones de la historia natural humana. Si una proposición de la lógica dijera: los seres humanos coinciden unos con otros de tal y tal modo (y ésta fuera la forma de la proposición histórico-natural), entonces diría su contraria que aquí se da una *falta* de coincidencia. No que se da otro tipo de coincidencia.

La coincidencia de los seres humanos, que es un presupuesto del fenómeno de la lógica, no es una coincidencia de *opiniones*, y menos aún de opiniones sobre cuestiones de lógica.

PARTE VII

1941 y 1944

1. El papel de las proposiciones que tratan de medidas y que no son 'proposiciones de experiencia'. —Alguien me dice: «Este trecho tiene 240 pulgadas de longitud.» Yo digo: «Eso son 20 pies, o sea 7 pasos aproximadamente» y así me he hecho una idea de la longitud. —La transformación se funda en proposiciones aritméticas y en la proposición que dice que 12 pulgadas = 1 pie.

Esta última proposición nadie la considerará habitualmente como proposición de experiencia. Se dice que expresa una convención. Pero el medir perdería todo su carácter habitual si, por ejemplo, 12 piezas de una pulgada cada una, colocadas en fila una tras otra, no formaran habitualmente una longitud que puede abreviarse de un modo particular.

¿He de decir, por ello, que la proposición '12 pulgadas = 1 pie' manifiesta todas esas cosas que proporcionan al medir su actual peculiaridad?

No. La proposición *se basa en* una técnica. Y, si quieres, en los hechos físicos y psicológicos que hacen posible esa técnica. Pero no por eso su sentido consiste en expresar esas condiciones. Lo

contrario de aquella proposición, '12 pulgadas = 1 pie', no dice que los instrumentos con los que medimos no sean suficientemente rígidos, o que todos nosotros no contemos y calculemos del mismo modo.

La proposición *se basa* en una técnica, pero no la describe.

2. La proposición desempeña el típico (pero no por ello *simple*) papel de la regla.

Mediante la proposición '12 pulgadas = 1 pie' puedo realizar una predicción; a saber, que 12 piezas de madera, de 1 pulgada de longitud cada una, colocadas una tras otra, mostrarán la misma longitud que otra pieza, medida de otro modo. Así pues, la gracia de esa regla es que mediante ella pueden hacerse ciertas predicciones. ¿Pierde por eso entonces el carácter de *regla*?

¿Por qué pueden hacerse esas predicciones? Bueno, todos los instrumentos de medida están construidos del mismo modo; su longitud no varía considerablemente; tampoco lo hacen piezas de madera, cortadas a la medida de una pulgada o de un pie; nuestra memoria es suficientemente buena como para no repetir ni olvidar cifra alguna al contar hasta '12'; etc.

Pero ¿no puede sustituirse la regla por una proposición de experiencia que diga que los instrumentos de medida están construidos de tal y tal modo, que la gente los maneja *así*? Se haría, pongamos, una presentación etnológica de esa institución humana.

Y resulta evidente que esa presentación podría adoptar la función de la regla.

Quien conoce una proposición matemática no por ello conoce algo ya. Si hay confusión en nuestras operaciones, si cada uno

calcula de modo diferente y unas veces así y otras de otro modo, entonces no se da cálculo alguno; si coincidimos, bueno, entonces no hemos hecho más que poner en hora nuestros relojes, pero no hemos medido aún tiempo alguno.

Quien conoce una proposición matemática, no por ello conoce *algo* ya.

O sea, la proposición matemática sólo ha de proporcionar el entramado para una descripción.

3. ¿Cómo puede conllevar consecuencias prácticas la mera transformación de la expresión?

Que tenga 25 × 25 nueces, puede verificarse contando 625 nueces, pero también puede descubrise de otro modo más cercano a la forma expresiva '25 × 25'. Y, naturalmente, es en el acoplamiento de esos dos tipos de *determinación* numérica en el que descansa uno de los objetivos del multiplicar.

La regla, en cuanto regla, está desligada de todo, se yergue ahí, por así decirlo, soberanamente; a pesar de que lo que le da su importancia son los hechos de la experiencia cotidiana.

Lo que tengo que hacer es algo como: describir el oficio de rey; al hacerlo, no he de caer en el error de explicar la dignidad real a partir de la utilidad del rey; pero tampoco dejar fuera de consideración ni la utilidad ni la dignidad.

En los trabajos prácticos me oriento según el resultado de la transformación de la expresión.

Pero entonces ¿cómo puedo decir aún que significa lo mismo decir «aquí hay 625 nueces» que «aquí hay 25 × 25 nueces»?

Quien verifica la proposición «aquí hay 625...», verifica con ello también «aquí hay 25 × 25...»; etc. Aunque una forma está más cercana a un tipo de verificación, y otra a otro.

¿Cómo puedes afirmar que «...625...» y «...25 × 25...» dicen lo mismo?—Sólo por nuestra aritmética *se convierten en una misma cosa.*

Puedo obtener unas veces un tipo tal de descripción, otras veces, otro, contando por ejemplo. Es decir, puedo obtener cualquiera de esas dos formas de un modo u otro; pero por diferentes caminos.

Podría ahora preguntarse: Si la proposición «...625...» fuera verificada una vez así, otra de otro modo, ¿diría ambas veces lo mismo?

O: ¿qué sucede si un método de verificación da '625' y el otro no da '25 × 25'?—¿Es verdadero ahí «...625...» y falso «...25 × 25...»? ¡No!—Dudar de uno significa dudar del otro: se trata de la gramática que nuestra aritmética proporciona a esos signos.

Si ambos modos de contar han de ser el fundamento de la *indicación de un número*, entonces sólo existe ahí *una* indicación de un número, aunque en formas diferentes. En contra puede decirse sin contradicción: «Contando de un modo obtengo 25 × 25 (y, por tanto, 625), contando del otro modo no obtengo 625 (tampoco, pues, 25 × 25)». La aritmética no pone ninguna objeción a esto.

Que la aritmética haga que ambas expresiones equivalgan, es, podría decirse, una treta gramatical.

Bloquea así un determinado tipo de descripción y lo dirige por otros canales. (Y no es necesario decir ya, que esto tiene que ver con los hechos de experiencia.)

4. Supón que he enseñado a alguien a multiplicar, pero no con ayuda de una regla general explícita, sino sólo viendo él como yo le resuelvo ejemplos de cálculo. Puedo señalarle después una *nueva* tarea y decir: «Haz con *esos* dos números lo mismo que yo hice con los anteriores». Pero puedo decir también: «Si haces con estos dos lo que yo hice con los anteriores llegarás al número...». ¿Qué clase de proposición en ésta?

«Escribirás tal y tal cosa» es una predicción. «Si llegas a escribir tal y tal cosa, es que lo has hecho como yo lo hice ante ti primero» determina lo que él llama «seguir su ejemplo».

'La solución de este problema es...'. – Si leo esto antes de haber resuelto el problema, ¿qué clase de proposición es ésa?

«Si haces con estos números lo que yo hice ante ti primero con los otros, obtendrás...»; eso significa ciertamente: «El resultado de esa operación es...», y esto no es una predicción, sino una proposición matemática. ¡Pero también es una predicción, sin embargo!—Una predicción de un tipo especial. Igual que quien al final encuentra que al sumar la columna ha resultado efectivamente tal y tal cosa, puede realmente sorprenderse por ello; puede, por ejemplo, exclamar: ¡sí, por Dios, ha resultado esto!

Imagínate sólo ese proceso de la predicción y de la confirmación como un especial juego de lenguaje; quiere decir: aislado del resto de la aritmética y de su aplicación.

¿Qué es lo que resulta tan extraño en ese juego de predicción? Lo que me parece extraño desaparecería si la predicción rezara: «Si llegas a creer que has seguido mi ejemplo, es que habrás obtenido *esto*» o: «Si llega un momento en que todo te parece correcto, el resultado será éste.» Este juego podría estar en conexión, por ejemplo, con la administración de un determinado veneno, y la predicción sería, entonces, que la inyección influye de tal y tal modo en nuestras facultades, en nuestra memoria por ejemplo.—Pero si podemos imaginarnos el juego con la administración de un veneno, ¿por qué no con la administración de una

medicina? Pero aún entonces puede que el peso de la predicción siga estando en que el hombre *sano* considera *esto* como resultado. O quizá: que *esto* satisface al hombre sano.

«Sígueme, y obtendrás esto» no dice, naturalmente: «Sígueme, y entonces me seguirás»; ni: «Calcula *así*, y entonces calcularás *así*.»—Pero ¿qué quiere decir «Sígueme»? En el juego de lenguaje puede tratarse simplemente de una orden: «¡Sígueme ahora!»

¿Cuál es la diferencia entre las predicciones: «Si calculas correctamente, obtendrás *esto*», y: «Si llegas a creer que calculas correctamente, obtendrás *esto*»?

¿Quién dice ahora que en mi juego de lenguaje anterior la predicción no significa esto último? Parece que no significa eso pero ¿cómo se *muestra* ello? Pregúntate *bajo qué circunstancias* parecería que la predicción predice lo uno, y bajo cuáles lo otro. Puesto que está claro: ello depende de las demás circunstancias.

Quien me predice que obtendré *esto* ¿no está diciendo ya que consideraré correcto ese resultado?— «¡Pero» —quizá digas— «sólo, justamente, porque eso *es* realmente correcto!»—Pero ¿qué quiere decir esto: «Considero correcto el cálculo porque es correcto»?

Y, sin embargo, puede decirse: en mi juego de lenguaje quien calcula no piensa en que el hecho —de que él obtiene *eso*— es una peculiaridad de *su* naturaleza; el hecho no le parece un hecho psicológico.

Estoy representándomelo bajo la impresión de que no hace otra cosa que seguir un hilo con el que ya contaba. Y de que acepta como una obviedad el cómo del seguir; y de que sólo conoce *una* explicación de su acción, a saber: el curso del hilo.

Evidentemente, se deja ir cuando sigue la regla o los ejemplos, pero lo que hace no lo considera como una peculiaridad de *su*

proceder, no dice: «bien, *así* he procedido», sino: «bien, *así* van las cosas».

Pero si alguien, sin embargo, al final del cálculo en nuestro juego de lenguaje dijera: «¡bien, *así* he procedido!»; o: «bien, *este* proceder me satisface!»; ¿puede decir, entonces, que ha malentendido todo el juego de lenguaje? ¡Ciertamente no! Si, por otra parte, no realiza una aplicación inoportuna.

5. ¿No es la *aplicación* del cálculo la que promueve esa concepción: que es el cálculo el que sigue su curso y no nosotros?

'Concepciones' diferentes han de corresponder a aplicaciones diferentes.

Pues existe, evidentemente, una diferencia entre: sorprenderse de que las cifras parezcan comportarse *así* sobre el papel; y sorprenderse de que resulte *eso*. Pero en cada caso veo el cálculo en otro contexto.

Pienso en el sentimiento del 'resultar', por ejemplo cuando sumamos una columna bastante larga de cifras de varias formas y resulta una cifra redonda como 1.000.000, tal como se nos había dicho con anterioridad. «Sí, por Dios, otra vez un cero» —decimos.

«Esto no se hubiera deducido de la contemplación de los números», podría decir yo también.

¿Qué sucedería si dijéramos, en lugar de 'de 6 × 6 resulta 36': 'El resultado del número 36 de 6 × 6'?—Sustituir la *proposición* por una expresión sustantiva. (La demostración muestra *el resultado*.)

¿Por qué quieres considerar la matemática siempre bajo la perspectiva del hallar y no del hacer?

Ha de tener gran influencia el que al calcular usemos las palabras «correcto» y «verdadero» y «falso», así como la forma del enunciado. (Movimiento lateral e inclinación de cabeza.)

¿Por qué he de decir que el saber que todos los seres humanos que han aprendido a calcular calculan *así* no es un saber *matemático*? Porque parece que remite a otro contexto diferente.

¿Es ya matemática aplicada el calcular lo que alguien obtendrá de un cáclulo?; ¿y también, pues: calcular lo que yo mismo obtendré?

6. No hay, ciertamente, duda alguna de que, al contrario que las proposiciones descriptivas, las proposiciones matemáticas desempeñan *en determinados juegos de lenguaje* el papel de reglas de representación[1].

Pero esto no quiere decir que este contraste no disminuya en todas las direcciones. Y *esto*, tampoco, que no sea de la mayor importancia.

El pedestal, sobre el que para nosotros está la matemática, lo ha conseguido ésta gracias al papel concreto que sus proposiciones desempeñan en nuestros juegos de lenguaje.

Lo que muestra la demostración matemática es presentado como relación interna, y sustraído a la duda.

[1] [Variante: ...son esquemas de representación,...]. (*Nota de los editores.*)

7. ¿Qué tienen en común una proposición matemática y una demostración matemática para que ambas se denominen «matemáticas»?

No: que la proposición matemática ha de ser demostrada matemáticamente; no: que la demostración matemática ha de demostrar una proposición matemática.

¿Qué tiene de matemático la proposición (el axioma) indemostrada? ¿Qué tiene ella en común con una *demostración* matemática?

¿He de responder: «Las reglas de inferencia de la demostración matemática son siempre proposiciones matemáticas»? ¿O: «Las demostraciones y proposiciones matemáticas sirven a la inferencia»? Esto ya estaría más cerca de la verdad.

8. La demostración tiene que mostrar una relación interna, no una externa. Puesto que podríamos imaginarnos también un procedimiento de transformación de una proposición mediante un *experimento*, y una transformación que se usara para la predicción de lo afirmado por la proposición transformada. Podría uno imaginarse, por ejemplo, que hubiera signos que, al añadirse otros signos, se desplazaran formando una verdadera predicción sobre la base de las condiciones expresadas en su posición inicial. Sí, si quieres, puedes considerar al ser humano que calcula como un aparato para un experimento así.

Pues el que un ser humano *calcule* el resultado, en el sentido de que no escribe inmediatamente el resultado, sino otras cosas primero, no lo convierte menos en un recurso físico-químico para producir una secuencia de signos a partir de otra secuencia de signos.

Así pues, tendría que decir: la proposición demostrada no es aquella secuencia de signos que un ser humano, adiestrado de tal y tal modo, produce bajo tales y tales circunstancias.

Si consideramos así la demostración, cambia completamente lo que vemos. Los pasos intermedios se convierten en un producto secundario falto de interés. (Como el ruido en el interior de un automático antes de que nos eche su producto.)

9. Decimos que la demostración es una imagen. Pero esta imagen necesita la aprobación que le damos al repasar.

Sí, es verdad; pero si recibiera la aprobación de uno y no de otro, y éstos no pudieran llegar a *entenderse*, ¿tendriamos entonces un cálculo?

Así pues, no es sólo la aprobación lo que la convierte en cálculo, sino la coincidencia de aprobaciones.

Puesto que podría imaginarse también un juego en el cual hubiera seres humanos que, estimulados por expresiones, semejantes, por ejemplo, a las de reglas generales, se les ocurrieran secuencias de signos para tareas prácticas concretas, es decir, *ad hoc*, y que esto diera buen resultado incluso. Y aquí las 'operaciones de cálculo', si quiere llamárselas así, no necesitan coincidir unas con otras. (Aquí podría hablarse de 'intuición'.)

La coincidencia de aprobaciones es la condición previa de nuestro juego de lenguaje, no se la constata en él.

Si la operación de cálculo es un experimento y *se cumplen las condiciones*, entonces hemos de aceptar como resultado lo que sale; y si la operación de cálculo es un experimento, entonces la proposición que dice que resulta tal y tal cosa es, ciertamente, la proposición que dice que bajo tales condiciones se produce ese tipo de signos. Y si bajo esas condiciones unas veces se produce un resultado y otras otro, entonces no puede decirse «aquí hay algo que falla», o «no pueden estar bien ambas operaciones», sino que habría que decir: esa operación no siempre da el mismo

resultado (el *porqué* no necesita saberse). Pero aunque el procedimiento es ahora tan interesante, o quizá se haya hecho aún más interesante, lo que no tenemos ya es una operación de cálculo. Y esto es nuevamente una observación gramatical sobre el uso de la expresión «operación de cálculo». Y, naturalmente, esa gramática tiene su interés.

¿Qué quiere decir *ponerse de acuerdo* respecto a una diferencia en el resultado de una operación de cálculo? Quiere decir, ciertamente, llegar a un cálculo uniforme. Y si no se puede llegar a ese acuerdo, entonces nadie puede decir que el otro calcula también; sólo que con resultado diferentes.

10. ¿Cómo es eso, he de decir: el mismo sentido sólo puede tener *una* demostración? ¿O: si se ha encontrado una demostración, cambia el sentido?

Algunos se resistirían, seguramente, a ello, dirían: «Así no puede encontrarse jamás la demostración de una proposición, puesto que, una vez hallada, ya no es demostración de *esa* proposición.» Pero esto no dice nada aún.

Lo que importa justamente es *qué* es lo que determina el sentido de la proposición. Aquello de lo que queremos decir que determina el sentido de la proposición. El uso de los signos ha de determinarlo; pero ¿qué consideramos como uso?

Las demostraciones demuestran la misma proposición, quiere decir, por ejemplo: ambas la muestran como un instrumento adecuado para el mismo fin.

Y el fin es una alusión a algo extramatemático.

Dije una vez: 'Si quieres saber lo que dice una proposición matemática, mira lo que demuestra su demostración[2].' Bien, ¿no hay ahí algo verdadero y falso? ¿Está realmente claro el sentido, el interés de una proposición matemática con sólo que podamos seguir la demostración?

Al '$\sim f(f)$' russelliano le falta ante todo la aplicación y, por ello, el sentido.

Pero si, a pesar de ello, se aplica esa fórmula, ello no quiere decir que '$f(f)$' haya de ser una proposición en algún sentido usual, o '$f(\xi)$' una función proposicional. Pues el concepto de proposición, excepto el de proposición de la lógica, Russell lo explica sólo a rasgos generales, convencionales.

Uno mira aquí al lenguaje sin mirar al juego de lenguaje.

Cuando decimos de diferentes secuencias de imágenes que han demostrado que $25 \times 25 = 625$, por ejemplo, entonces resulta bastante fácil reconocer qué es lo que fija el lugar de esa proposición, al que ambos caminos llegan.

La nueva demostración proporciona a la proposición un lugar dentro de un nuevo orden; en ello ocurre a menudo una transferencia de un tipo de operaciones a otro completamente diferente. Como cuando traducimos ecuaciones a curvas. Y reparamos, entonces, en algo con respecto a las curvas y, por tanto, a las ecuaciones. Pero ¿con qué derecho llegamos a convencernos por asociaciones de ideas que no tienen nada que ver en apariencia con el objeto de nuestros pensamientos?

Bueno, nuestras operaciones tampoco tienen menos que ver con ese objeto que, pongamos, el dividir en el sistema decimal, con el reparto de nueces. Sobre todo cuando uno se imagina (cosa que puede hacerse fácilmente) que esa operación hubiera sido inventada originariamente para otro fin que el de hacer particiones o cosas semejantes.

---

[2] Cfr. *Philosophische Grammatik*, p. 369 ss.; también *Philosophische Bemerkungen*, p. 183 ss. (*Nota de los editores.*)

Si preguntas: «¿Con qué derecho?», la respuesta es: quizá con ninguno.—¿Con qué derecho dices que el desarrollo de ese sistema siempre irá paralelo a aquél? (Es como si tomaras la pulgada y el pie y establecieras a *ambos* como unidad y afirmaras que $12n$ pulgadas siempre tendrán la misma longitud que n pies.)

Si dos demostraciones demuestran la misma proposición, es posible imaginar circunstancias en las que desapareciera todo el entorno que conecta a esas demostraciones, de modo que éstas quedaran ahí, solas y desnudas, y no hubiera motivo alguno para decir que tienen algún interés en común, que demuestran la misma proposición.

Basta imaginarse que las demostraciones, sin el organismo de aplicaciones que envuelve y conecta a ambas, quedarían ahí desnudas y al descubierto, por así decirlo. (Como dos huesos, separados del entorno múltiple del organismo; sólo dentro del cual estamos acostumbrados a imaginarlos.)

11. Supón que se calculara con signos y que a veces se practicara también la división mediante expresiones de la forma $(n-n)$, y que de ese modo se consiguiera de vez en cuando otros resultados que los que normalmente obtenemos al multiplicar, etcétera. Pero que esto no incomodara a nadie.—Compáralo con: se confeccionan listas, relaciones de personas, pero alfabéticamente no como nosotros lo hacemos; y así sucede que el mismo nombre aparece en alguna lista más de una vez.—Pero ahora puede suponerse: que nadie repara en ello; o que la gente lo ve pero lo acepta tranquilamente. Como podrían imaginarse gentes de una tribu, que, cuando se les caen monedas a tierra, no consideran que valga la pena recogerlas. (Para esa ocasión tienen, digamos, una frase hecha: «Pertenecen a los demás», o algo parecido.)

Pero cambian los tiempos y las gentes comienzan (al principio sólo algunos) a exigir exactitud. ¿Con razón? ¿Sin ella?—¿*No* eran realmente listas las listas de antes?

Pongamos que varios de nuestros resultados de cálculo los hayamos conseguido mediante una contradicción oculta. ¿Son por ello ilegítimos?—¿Y si rehusamos absolutamente el aceptar tales resultados pero tenemos que pueda deslizarse alguno? Bueno, entonces tenemos una idea que podría servir de modelo a un nuevo cálculo. De igual modo que alguien puede tener una idea para un nuevo juego.

La contradicción russelliana no resulta inquietante porque sea una contradicción, sino porque la tumoración entera, cuyo final es ella, es una tumoración cancerosa, que parece haber crecido sin finalidad ni sentido en un cuerpo normal.

¿Puede decirse ahora: «Queremos un cálculo que nos diga con mayor certeza la verdad»?

¡Pero no puedes dejar que valga una contradicción!— ¿Por qué no? Ya empleamos a veces, pocas realmente, esa forma en nuestra conversación, pero puede imaginarse una técnica lingüística en la que fuera un implemento habitual.

Podría decirse, por ejemplo, de un objeto en movimiento, que existe y no existe en ese lugar; el cambio podría expresarse mediante la contradicción.

Tomemos un tema como el de Haydn (Coral de San Antonio), tomemos la parte de una de las variaciones de Brahms que corresponde a la primera parte del tema, y propongamos la tarea de construir la segunda parte de la variación en el estilo de su primera parte. Este es un problema del mismo tipo que los problemas matemáticos. Si se encuentra la solución, tal como Brahms la ofrece, por ejemplo, entonces ya no se duda; ésa es la solución.

Estamos de acuerdo con ese camino. Y, sin embargo, está claro que puede haber fácilmente diferentes caminos, sobre cada

uno de los cuales podamos estar de acuerdo, a cada uno de los cuales podamos llamar consecuente.

'Damos muchos pasos legítimos —esto es, permitidos por las reglas— y de repente surge una contradicción. La lista de reglas, por tanto, tal como es, no vale de nada, ya que la contradicción trastorna completamente el juego.' ¿Por qué dejas que se trastorne así?

Pero yo quiero que haya de poderse seguir infiriendo *mecánicamente* según la regla, sin llegar a resultados contradictorios. Bien ¿qué tipo de previsión deseas? ¿Una que no admita tu cálculo actual? Bueno, no por ello es éste una parte mala de la matemática, o no matemática en sentido pleno. El sentido de la palabra «mecánicamente» te induce a error.

12. Si, con un fin práctico, quieres evitar mecánicamente una contradicción, cosa que tu cálculo no puede hacer ahora, es como si buscaras, por ejemplo, una construcción de un polígono de... ángulos, que hasta ahora no has podido dibujar más que tentativamente; o una solución de una ecuación de tercer grado, a la que hasta ahora sólo te has aproximado.

Lo que se hace aquí no es mejorar matemática mala, sino inventar una nueva parte de la matemática.

Supón que quisiera determinar un número irracional de modo que en su desarrollo no aparezca la figura '777'. Podría tomar π y disponer: cuando aparezca esa figura pondremos '000' en su lugar. Ahora alguien me dice: eso no basta, puesto que aquel que calcula los lugares se ve impedido a mirar hacia atrás a los anteriores. Entonces necesito otro cálculo; uno en el que me pueda asegurar con anterioridad de que no aparecerá '777'. Un problema matemático.

'Mientras la ausencia de contradicción no esté demostrada, no puedo estar del todo seguro de que alguien, que calcula sin pensar,

pero de acuerdo a las reglas, no descubra algo falso en mi cálculo.' Así pues, el cálculo no será fiable hasta que no se haya conseguido aquella previsión.—Pero imagina que digo: «¿*Hasta qué punto* no fiable?»—Si habláramos de grados de falta de fiabilidad, ¿no le quitaríamos así a ésta el aguijón metafísico?

¿No eran buenas las primeras reglas del cálculo? Bueno, nosotros las dimos sólo *porque* eran buenas.—Si más tarde aparece una contradicción, ¿*no* han cumplido ellas con su obligación? En absoluto, ellas no fueron dadas para esta clase de aplicación.

Puedo querer dar a mi cálculo un cierto tipo de previsión. Esta no hace de él una parte *propia* de la matemática, pero sí, por ejemplo, más útil para determinados fines.

La idea de la mecanización de la matemática. La moda del sistema axiomático.

13. ¡Pero supongamos que los 'axiomas' y 'métodos de inferencia' fueran no sólo unos modos cualquiera de construcción, sino, además, plenamente convincentes! Bien, entonces ello significa que hay casos en los que la construcción con esos elementos *no* convence.

Y los axiomas lógicos, en efecto, no son en absoluto convincentes, si en lugar de las variables proposicionales implantamos estructuras, que nadie haya previsto originariamente, a saber, cuando (al principio) se otorgó reconocimiento incondicional a la verdad de los axiomas.

Pero ¿y si alguien dice: los axiomas y métodos de inferencia han de elegirse de modo que no puedan demostrar ninguna proposición falsa?

'No queremos sólo un cálculo bastante fiable, sino uno *absolutamente* fiable. La matemática tiene que ser *absoluta*.'

Supón que hubiera establecido las reglas del juego 'el zorro y el cazador' —imaginándome el juego entretenido y bonito. Pero que después descubro que los cazadores siempre pueden ganar, sólo con que una vez sepan cómo.

Ahora, digamos, estoy descontento con mi juego. Las reglas que di han madurado un resultado que yo no había previsto y que me estropea el juego.

14. «N se dio cuenta de que en los cálculos se había abreviado a menudo con expresiones de la forma '$(n-n)$'. Comprobó la discrepancia de los resultados, así surgida, y mostró cómo se habían perdido vidas humanas a causa de ese modo de calcular.»

Pero supongamos que también otros hubieran reparado en esas contradicciones, sólo que no pudieron darse cuenta de dónde venían. Habrían calculado con mala conciencia, por así decirlo. Entre resultados contradictorios habrían elegido *uno*, pero con inseguridad, mientras que el descubrimiento de N les hubiera proporcionado seguridad completa. Pero ¿se dijeron: «Hay algo en nuestro cálculo que no está en orden»? ¿Era su inseguridad del mismo tipo que la nuestra cuando emprendemos un cálculo físico, pero no estamos seguros de si esas fórmulas producirán aquí realmente el resultado correcto? O ¿existía alguna duda sobre si su cálculo era realmente un cálculo? En ese caso: ¿qué hicieron para subsanar el inconveniente?

Esas gentes hasta ahora sólo relativamente pocas veces han hecho uso del abreviar por medio de expresiones de valor *O*. Pero un día alguien descubre que de ese modo pueden obtener realmente el resultado que sea.—¿Qué hacen entonces? Bueno, podemos imaginarnos cosas muy diferentes. Por ejemplo, pueden declarar que ese modo de calcular ha perdido con ello su interés, y que en el futuro no volverá a calcularse *así*.

'El cree que calcula' —diría alguien— 'pero de hecho no calcula.'

15. Si la operación de cálculo ha perdido su interés para mí tan pronto he sabido que ahora puedo obtener cualquier resultado, ¿no ha tenido ninguno mientras *no* lo sabía?

Ciertamente, ahora puedo declarar que todas esas operaciones de cálculo no valen nada —he dejado de realizarlas—, pero ¿eso significa que no eran operaciones de cálculo?

Una vez, sin saberlo, inferí mediante una contradicción oculta. ¿Es ahora ese resultado mío, falso o incorrectamente obtenido?

Si la contradicción está tan oculta que nadie la percibe, ¿por qué no hemos de llamar a lo que ahora hacemos el cálculo auténtico?

Decimos que la contradicción *aniquilaría* el cálculo. Pero si, por así decirlo, apareciera en dosis mínimas, a instantes, pongamos, no como un instrumento de cálculo habitual, ¿también entonces aniquilaría el cálculo?

Imagina que la gente se hubiera hecho la ilusión de que $(a+b)^2$ tuviera que ser igual a a^2+b^2. (¿Se trata de una ilusión del mismo tipo que: tendría que haber una trisección del ángulo mediante regla y compás?) ¿Puede uno, pues, hacerse así la ilusión de que dos métodos de cálculo obtienen lo mismo, cuando realmente no es lo mismo lo que obtienen?

Sumo una columna, la sumo de diferentes modos, coloco, por ejemplo, los números en diferentes órdenes, y consigo siempre. al

azar, algo distinto.—Quizá diga entonces: «Estoy totalmente confuso; o cometo faltas al azar, o cometo ciertas faltas en determinados contextos: por ejemplo, ante '6 + 3 = 9' digo siempre '7 + 7 = 15'.»

O podría imaginarme que, en el cálculo, resto de repente unas veces en lugar de sumar, pero no pienso que estoy haciendo algo diferente.

Podría suceder que no encontrara el fallo y me considerara demente. Pero ésa no tendría necesariamente que ser mi reacción.

'La contradicción destruye el cálculo', ¿de dónde esa posición especial? Yo creo que con un poco de fantasía puede, ciertamente, zarandeársela.

Para solucionar estos problemas filosóficos hay que comparar cosas a las que a nadie se le ha ocurrido comparar aún seriamente.

En este campo pueden hacerse toda clase de preguntas, y ello es cosa pertinente al asunto, pero no conduce por su centro.

Hay una serie determinada de preguntas que sí conducen por el centro, al aire libre. A las otras se responde incidentalmente.

Es tremendamente difícil encontrar el camino a través del centro.

Ese camino pasa por *nuevos* ejemplos y comparaciones. Los ya muy usados no nos lo muestran.

Supongamos que nunca se hubiera encontrado la contradicción russelliana. Bien, ¿es del todo claro que entonces poseeríamos un cálculo falso? ¿No existen, pues, diferentes posibilidades en esto?

¿Y si se hubiera encontrado, en efecto, la contradicción, pero nadie se hubiera inquietado por ella y se hubiera determinado, por ejemplo, no sacar inferencias de ella? (Al igual que nadie saca tampoco inferencia alguna del 'mentiroso'.) ¿Hubiera sido esto un error manifiesto?

«¡Pero entonces esto no es propiamente un cálculo! ¡Pierde realmente todo su *rigor*!» Bueno, no *todo*. Y no posee todo el rigor sólo si se persigue un determinado ideal de rigor, si se construye un determinado estilo de matemática.

'Pero una contradicción en la matemática' es ciertamente incompatible con la aplicación de la matemática.

'Cuando se aplica consecuentemente, esto es, para la producción de resultados *arbitrarios*, la contradicción convierte la aplicación de la matemática en una farsa, o en una especie de ceremonia superflua. Su efecto práctico es como el de instrumentos de medida no rígidos, por ejemplo, que, debido a la contracción y dilatación, permiten diferentes resultados al medir.' Pero ¿*no* era medir, medir a pasos? Y si los seres humanos trabajaran con instrumentos de medida de pasta, ¿habría que decir que esto es ya de por sí falso?

¿No podrían imaginarse razones por las que fuera deseable una cierta elasticidad en los instrumentos de medida?

«Pero ¿no es correcto fabricar los instrumentos de medida cada vez de materiales más duros e inalterables?» Ciertamente que es correcto; ¡si es eso lo que se quiere!

«¡¿Así que defiendes la contradicción?!» En absoluto; tan poco como los instrumentos de medida blandos.

Hay que evitar un *fallo:* Se piensa que la contradicción *tiene que* carecer de sentido: esto es, si se usan *consecuentemente* los signos '*p*', '~', '.', por ejemplo, entonces '*p*. ~ *p*' no puede decir nada.—Pero piensa: ¿qué quiere decir proseguir 'consecuentemente' tal y tal uso? ('Proseguir consecuentemente este trozo de curva.')

16. ¡¿Para qué necesita la matemática una fundamentación?! La necesita tan poco, creo, como las proposiciones que tratan de objetos físicos o las que tratan de impresiones de los sentidos, necesitan un *análisis*. Aunque sí precisan, tanto las proposiciones matemáticas como las otras, de una clarificación de su gramática.

Los problemas *matemáticos* respecto a lo que se denomina fundamentos están para nosotros a la base de la matemática tan poco como la roca pintada sostiene al castillo pintado.

'Pero ¿la contradicción no convertiría a la lógica fregeana en algo inservible para la fundamentación de la aritmética?' ¡Ciertamente! Pero ¡¿quién ha dicho que haya de servir para ello?!

Podría uno incluso imaginarse que se hubiera dado la lógica fregeana a un salvaje como instrumento para derivar proposiciones aritméticas. Y que el salvaje derivó la contradicción, sin reparar en que es tal, y de ella deriva ahora proposiciones arbitrarias, verdaderas y falsas.

'Un ángel bueno nos ha preservado hasta ahora de seguir *ese* camino.' Bueno ¿y qué más quieres? Podria decirse, creo: siempre se necesitará un ángel bueno, hagas lo que hagas.

17. Se dice que el calcular es un experimento, con el fin de mostrar lo práctico que puede ser. Pues se sabe que el experimento tiene realmente un valor práctico. Sólo que se olvida que lo

posee gracias a una técnica, que es un hecho histórico-natural, pero cuyas reglas no desempeñan el papel de proposiciones de la historia natural.

«Los límites de la empiria[3].» —(¿Vivimos porque es práctico vivir? ¿Pensamos porque es práctico pensar?)

Que un experimento es práctico, es algo que él sabe; así pues, la operación de cálculo es un experimento.

Nuestras acciones experimentales poseen, en verdad, una fisonomía característica. Cuando en un laboratorio veo que alguien echa un líquido en el tubo de ensayo y lo calienta encima de una llama Busen, me siento inclinado a decir que está haciendo un experimento.

Supongamos que gentes, que saben contar, quieren —como nosotros— conocer números con fines prácticos de diversos tipos. Y para ello preguntan a ciertas gentes, que, una vez que se les ha explicado el problema práctico, cierran los ojos y esperan a que se les ocurra el número apropiado a ese fin; así, no habría aquí operación de cálculo alguna, fuera como fuere de fiable el número dado. Esta manera de determinar un número podría, incluso, resultar en la práctica más fiable que cualquier operación de cálculo.

Una operación de cálculo —podría decirse— es una parte de la técnica de un experimento, pero no es un experimento ella sola.

¿Se olvida, pues, que pertenece al experimento una determinada *aplicación* del proceso? Y la operación de cálculo media en la aplicación.

---

[3] Cfr. p. 163, nota. (*Nota de los editores.*)

¿Pensaría alguien denominar experimento a la interpretación de una cifra mediante una clave?

Cuando dudo de si los números *n* y *m*, multiplicados, dan 1, mi duda no se refiere a que vaya a surgir una confusión en nuestro cálculo y la mitad de los seres humanos, pongamos, consideren correcto algo, mientras la otra mitad considera correcto algo diferente.

Una acción es 'experimento' sólo si se la considera desde un determinado punto de vista. Y está *claro* que la acción de calcular puede ser también un experimento.

Por ejemplo, puedo querer comprobar lo que calcula esa persona, bajo tales circunstancias, con respecto a esa tarea propuesta. Pero ¿no es eso precisamente lo que preguntas cuando quieres saber cuántas son 52×63? Puede ser, sí, que lo pregunte —mi pregunta puede, incluso, expresarse con esas palabras. (Cfr. con ello: ¿Es la proposición «¡Escucha, ella se está quejando!» una proposición sobre su comportamiento, o sobre su sufrimiento?)

Pero ¿qué sucede ahora si *repaso* su operación de cálculo? 'Bueno, entonces haré un experimento más para comprobar con total seguridad que todas las personas normales reaccionan así.' Y si *no* reaccionan uniformemente, ¿cuál es el resultado matemático?

18. «Si la operación de cálculo ha de ser práctica, ha de sacar a la luz hechos. Y eso sólo puede hacerlo el experimento.»

Pero ¿qué cosas son 'hechos'? ¿Crees que puedes mostrar a qué hecho nos referimos, señalando algo con el dedo? ¿Eso hace ya que esté claro el papel que desempeña la 'determinación' de un hecho?—¡Y si fuera la matemática la que determina primero el *carácter* de eso que llamas 'hecho'?

«Es interesante saber *cuántas* vibraciones tiene ese tono.» Pero es la aritmética la que te ha enseñado primero esa pregunta. Te ha enseñado a ver esa clase de hechos.

La matemática —yo diría— no sólo te enseña la respuesta a una pregunta; sino todo un juego de lenguaje, con preguntas y respuestas.

¿Hemos de decir que la *matemática* nos enseña a contar?

¿Puede decirse de la matemática que nos enseña *métodos de investigación* experimentales? ¿O que nos ayuda a encontrar tales métodos de investigación?

'Para ser práctica, la matemática ha de mostrarnos hechos.' Pero ¿tienen que ser esos hechos los hechos *matemáticos*? ¿Por qué en lugar de 'enseñarnos hechos' no ha de crear las formas de eso que llamamos hechos?

«¡Sí, pero sigue siendo un hecho empírico el que los seres humanos calculen así!»—Sí, pero no por ello se convierten sus proposiciones de cálculo en proposiciones empíricas.

«¡Sí, pero nuestro cálculo tiene que basarse en hechos empíricos!» Ciertamente. Pero ¿a cuáles te refieres ahora? ¿A los psicológicos y fisiológicos, que lo hacen posible, o a aquellos que hacen de él una actividad provechosa? La conexión con *éstos* consiste en que la operación de cálculo es la imagen de un experimento, resulte como resulte. De los otros recibe el cálculo su peculiaridad, su fisonomía: pero esto no quiere decir en absoluto que las proposiciones de la matemática cumplan la función de las proposiciones empíricas. (Esto sería casi como si alguien creyera, porque sólo aparecen actores en la obra, que nadie más puede tener una ocupación provechosa en el escenario de un teatro.)

En la operación de cálculo *no existen* conexiones causales, sólo las conexiones de la imagen. Y aquí no cambia nada el hecho de que comprobemos la figura de la demostración con el fin de

aceptarla. El hecho, por tanto, de que estemos tentados a decir que la hemos hecho surgir de un experimento psicológico. Pues el proceso psíquico no se analiza psicológicamente al calcular.

'El minuto tiene 60 segundos.' Esta es una proposición *semejante* en todo a una matemática. ¿Depende su verdad de la experiencia?—Bueno: ¿podríamos hablar de minutos y horas si no existiera sentido del tiempo; si no hubiera relojes o, por razones físicas, no los pudiera haber; si no se dieran todas las conexiones que proporcionan sentido y significado a nuestras medidas de tiempo? En ese caso —diríamos— habría perdido su sentido la medición del tiempo (como la acción de dar mate, si desapareciera el juego del ajedrez), o tendría otro complemento diferente. Pero ¿la experiencia así descrita haría falsa a la proposición, y la haría verdadera la otra? No; *esto* no describe la función de la proposición. Esta funciona de modo completamente diferente.

'Para que el cálculo pueda ser práctico tiene que basarse en hechos empíricos.'—¿Por qué no ha de determinar, mejor, qué *son* hechos empíricos?

Considera: 'Nuestra matemática convierte experimentos en definiciones.'

19. Pero ¿no podemos imaginarnos una sociedad humana en la que no exista un cálculo, en idéntico sentido al nuestro, ni un medir, en idéntico sentido al nuestro?—Claro que sí.—Entonces, ¿por qué he de molestarme en desarrollar qué sea la matemática?

Porque existe entre nosotros una matemática, y una concepción particular de ella, un ideal, por así decirlo, de su puesto y función; esto hay que desarrollarlo claramente.

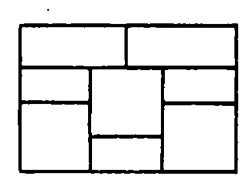
No exijas demasiado, y no temas que tu justa pretensión se desvanezca en la nada.

Mi tarea no es atacar desde *dentro* la lógica de Russell, sino desde fuera.

O sea: no atarcala matemáticamente —entonces haría matemática—, sino su posición, su oficio.

Mi tarea no es hablar sobre el teorema de Gödel, por ejemplo, sino evitar hacerlo.

20. El problema de hallar el número de caminos por los que, continuamente y sin repetición, podemos seguir las junturas de este muro:



lo reconoce cualquiera como un problema *matemático*. Si el dibujo fuera más complicado y mayor, no se pudiera abarcar, entonces podría suponerse que cambia sin que lo notemos, y, entonces, el problema de encontrar ese número (que cambia, quizá, legaliformemente) ya no sería un problema matemático. Pero el problema no es matemático, aun cuando el número no cambie. Pero aun cuando el muro resulte abarcable a la vista, no puede decirse, por ello, que el problema se convierta en un problema matemático, como se dice: *este* problema es ahora uno de la embriología. Más bien: *aquí* necesitamos una solución matemática. (Como: aquí lo que necesitamos es un *modelo*.)

¿'Reconocimos' el problema como uno matemático porque la matemática trata del seguimiento gráfico de ilustraciones?

¿Por qué, entonces, nos inclinamos a considerar *este* problema decididamente como uno 'matemático'? Porque vemos inmediatamente en él que la respuesta a una cuestión *matemática* es prácticamente todo lo que aquí necesitamos. Aunque el problema pudiera considerarse fácilmente como uno psicológico, por ejemplo.

Algo semejante respecto a la tarea de doblar una hoja de papel de tal y tal modo.

Puede parecer que la matemática fuera aquí una ciencia que hiciera experimentos con *unidades;* a saber, experimentos en los que no importa el tipo de las unidades, es decir, si se trata de guisantes, bolas de cristal, rayas, etc.—Lo que descubre es sólo aquello que vale de *todos* ellos. Así pues, nada con respecto a su punto de fusión, por ejemplo, pero sí que 2 y 2 de ellos son 4. Y el problema del muro es precisamente uno matemático, es decir: puede solucionarse mediante *este* tipo de experimento.—Y ¿en qué consiste el experimento matemático? Bueno, en colocar y descolocar cosas, trazar rayas, escribir expresiones, proposiciones, etcétera. Y se ha de procurar que no moleste el que la apariencia externa de estos experimentos no sea la de experimentos físicos, químicos, etc.; se trata, precisamente, de otros diferentes. Sólo existe una dificultad: lo que sucede ahí es bastante fácil de ver, de describir, pero *¿cómo* hay que verlo en tanto que experimento? ¿Cuál es aquí la cabeza, y cuál el pie del experimento? ¿Cuáles son las condiciones del experimento, cuál su resultado? ¿Es el resultado de la operación de cálculo, o la imagen de la operación de cálculo, o la aprobación (consista en lo que consista) de quien calcula?

Pero ¿los principios de la dinámica, por ejemplo, se transforman en proposiciones de la matemática pura por el hecho de dejar abierta su interpretación y de aplicarlos a la creación de un sistema de medida?

'La demostración matemática tiene que ser abarcable' —esto depende de la abarcabilidad de aquella figura.

21. No olvides: la proposición que dice de sí misma que es indemostrable ha de ser interpretada como enunciado *matemático*, puesto que eso no es algo *obvio*.

No es obvio que la proposición que dice que tal y tal estructura no es construible, haya de interpretarse como proposición matemática.

Esto es: si alguien dijera: «ella enuncia de sí misma», hay que entenderlo de una manera especial, Porque aquí aparece fácilmente la confusión a causa del variopinto uso de la expresión «esta proposición enuncia algo de...».

En este sentido, también la proposición '625 = 25 × 25' enuncia algo sobre sí misma: a saber, que se obtiene la cifra de la izquierda multiplicando las que están a la derecha.

El teorema de Gödel, que enuncia algo sobre sí mismo, no se *menciona* a sí mismo.

'La proposición dice que ese número no se obtiene de ese modo a partir de esos números.'—Pero ¿estás seguro también de que lo has traducido correctamente al castellano? Ciertamente eso parece.—Pero ¿no puede uno equivocarse en esto?

¿Podría decirse: Gödel dice que hay que poder fiarse de una demostración matemática aunque en la práctica quiera interpretársela como demostración de la constructibilidad de la figura proposicional siguiendo las reglas de la demostración?

O: una proposición matemática ha de poder ser interpretada como proposición de una geometría realmente aplicable a sí misma. Y si se hace eso, se muestra, entonces, que en ciertos casos uno no puede fiarse de una demostración.

Los límites de la empiria[4] no son supuestos faltos de garantía, o aceptados intuitivamente como correctos, sino modos y maneras del comparar y del obrar.

22. 'Supongamos que tenemos una proposición matemática que dice que un determinado número... no puede obtenerse a partir de los números..., ..., ..., mediante tales y tales operaciones. Y supongamos que hubiera una regla de traducción, según la cual fuera posible traducir esta proposición aritmética a la cifra de aquel primer número, los axiomas a partir de los que intentamos demostrarla, a las cifras de aquellos otros números, y nuestras reglas de inferencia, a las operaciones mencionadas en la proposición.—Si hubiéramos derivado, entonces, *la proposición aritmética* a partir de los axiomas y de acuerdo a nuestras reglas de inferencia, habríamos demostrado *con ello* su derivabilidad, pero también una proposición que, de acuerdo a aquella regla de traducción, puede expresarse así: esa proposición aritmética (a saber, la nuestra) es inderivable.'

¿Qué habría que hacer entonces? Me imagino que confiamos en nuestra *construcción* del *signo proposicional*, esto es, en la demostración *geométrica*. Decimos, pues, que esa 'figura proposicional' se obtiene a partir de aquéllas de tal y tal modo. Y, ahora, traducir a otra notación significa: esa cifra se consigue mediante esas operaciones a partir de aquellas otras cifras. Hasta ese punto la proposición y su demostración no tienen nada que ver con una *lógica* especial. Aquí, esa proposición construida era simplemente otro modo distinto de escribir la cifra construida; tenía la *forma* de una proposición, pero no lo comparamos con otras proposiciones como signo que *dice* esto o lo otro, que tiene un *sentido*.

Pero hay que decir, en verdad, que ese signo no necesita ser considerado ni como signo proposicional ni como signo numérico.—Pregúntate: ¿qué lo hace ser lo uno, qué lo otro?

---

[4] Cfr. p. 163, nota. (*Nota de los editores.*)

Si leemos ahora la proposición construida (o la cifra) como proposición del lenguaje matemático (en castellano, pongamos), resulta que dice lo contrario justamente de lo que nosotros consideramos demostrado. Por tanto, hemos probado la falsedad del sentido real de la proposición y al mismo tiempo lo hemos *demostrado;* a saber, si consideramos como demostración su construcción a partir de los axiomas admitidos y mediante las reglas de inferencia admitidas.

Si alguien nos objetara que no podemos hacer tales asunciones puesto que se trataría de asunciones *lógicas* o *matemáticas*, respondemos que sólo es necesario asumir que alguien ha cometido un fallo en el cálculo y que *por ello* ha llegado al resultado que nosotros 'asumimos', y que él no puede por el momento encontrar ese fallo en el cálculo.

Aquí volvemos otra vez a la expresión «la demostración nos convence». Y lo que aquí nos interesa con respecto al convencimiento, no es ni su expresión por la voz y el gesto, ni el sentimiento de satisfacción o cosas parecidas, sino su confirmación en el uso de lo demostrado.

Puede preguntarse, con razón, qué importancia tiene la prueba de Gödel para nuestro trabajo. Puesto que una parte de la matemática no puede solucionar problemas del tipo de los que *nos* inquietan. - La respuesta es: que nos interesa la *situación* en la que nos pone una prueba así. '¿Qué hemos de decir ahora'? ése es nuestro tema.

Por muy extraño que suene, parece que mi tarea, respecto al teorema de Gödel, consiste simplemente en determinar con claridad qué significa en la matemática una proposición como: «Supongamos que esto pudiera demostrarse.»

23. ¡Nos resulta demasiado natural preguntar «¿cuántos?» y ponernos a contar y calcular a continuación!

¿Contamos porque es práctico contar? ¡Contamos!—Y calculamos también.

Sobre la base de un experimento —o como quiera llamárselo— puede determinarse a veces la cifra de la medición del objeto medido, pero a veces también la medida apropiada.

¿Es, pues, la unidad de medida el resultado de mediciones? Sí y no. No el resultado conseguido al medir, sino quizá la *consecuencia* de mediciones.

Una cuestión sería: «¿Nos ha enseñado la experiencia a calcular *así*?»—Y otra: «¿Es la operación de cálculo un experimento?»

24. Pero ¿no puede derivarse todo de todo de acuerdo a alguna regla, de acuerdo a *cualquier* regla oportunamente interpretada? ¿Qué significa cuando digo, por ejemplo: este número puede derivarse por multiplicación de aquellos dos? Pregúntate: ¿Cuándo se usa esa proposición? Bueno, no se trata, por ejemplo, de una proposición psicológica, que haya de decir lo que harán los humanos bajo determinadas condiciones, lo que los satisfará; tampoco es una proposición física concerniente al comportamiento de signos sobre el papel. Se aplica, en otro contexto diferente, como una proposición psicológica o física.

Supón que ciertos seres humanos aprender a calcular aproximadamente como lo hacen de hecho; ¡pero imagínate ahora diferentes 'contextos' que hagan del cálculo, unas veces, un

experimento psicológico, otras, uno físico con los signos del cálculo, otras, otra cosa!

Suponemos que los niños aprenden a contar, y los métodos simples de cálculo, por imitación, estímulo y corrección. Pero que, desde un cierto punto de vista, la no coincidencia de los que calculan (así pues, los fallos de cálculo, por ejemplo) se considera ahora, no como algo malo, sino como algo psicológicamente interesante. «¿Así que considerabas que esto era correcto? Todos los demás lo hemos hecho así.»

Quiero decir: que todo lo que llamamos matemática, concepción *matemática* de la proposición $13 \times 14 = 182$, tiene que ver con el lugar especial que asignamos a la actividad de calcular. O con el lugar especial que la operación de cálculo... ocupa en nuestra vida, en el resto de nuestras actividades, O con el juego de lenguaje en el que está.

Puede aprenderse de memoria una pieza musical para poder ejecutarla correctamente; pero también en un experimento psicológico, para investigar el trabajo de la memoria musical. Pero también podría memorizarse con el fin de discriminar cualquier cambio de la partitura.

25. Un juego de lenguaje: hago multiplicaciones y digo al otro: si calculas correctamente obtendrás esto y esto; él realiza la operación seguidamente y se alegra de la corrección, a veces, a veces de la falsedad de mi predicción. ¿Qué presupone ese juego de lenguaje? Que es fácil encontrar 'fallos de cálculo' y que siempre se consigue rápidamente el acuerdo sobre la corrección o falsedad de la operación de cálculo.

«Si estás de acuerdo con cada uno de los pasos, llegarás a ese resultado.»

¿Cuál es el criterio de que un paso de la operación sea correcto; no es el de que el paso me parece correcto, y otras cosas del mismo estilo?

¿Cuál es el criterio de que en el cálculo consiga dos veces la misma cifra? ¿No es el de que las cifras me *parecen* iguales, y cosas semejantes?

¿Cuál es el criterio de que he seguido aquí el paradigma?

«Si llegas a decir que cada uno de los pasos es correcto, resultará esto.»

La predicción es propiamente: en tanto consideres correcto lo que haces, harás *esto*.

En tanto consideres correcto cada uno de los pasos, seguirás este camino.—Y, así, llegarás también a este final.

Se hace una inferencia *lógica* cuando ninguna experiencia puede contradecir la conclusión porque entonces contradiría las premisas. Es decir, cuando la inferencia es sólo un movimiento en los medios de la representación.

26. En un juego de lenguaje se usan proposiciones; informes, órdenes y cosas semejantes. Y las personas emplean también proposiciones de cálculo. Se las dicen, por ejemplo, a si mismas, entre las órdenes y los informes.

Un juego de lenguaje en el que alguien calcula según una regla y coloca piedras de una edificación de acuerdo a los resultados del cálculo. Ha aprendido a operar con signos escritos de acuerdo a reglas.—Quien describe el proceso de ese aprendizaje y enseñanza, ha dicho todo lo que se puede decir sobre la actuación

correcta de acuerdo a la regla. No podemos ir más allá. No vale de nada, por ejemplo, retroceder hasta el concepto de coincidencia, porque no es más seguro que una acción coincida con otra, que el que se haya llevado a cabo siguiendo una regla. Proceder según una regla se basa también, ciertamente, en una coincidencia.

Como se ha dicho, en qué consista seguir correctamente una regla, es algo que no puede describirse *con mayor cercanía* que describiendo el *aprendizaje* del 'proceder según una regla'. Y esa descripción es una descripción cotidiana, como la del cocinar y coser, por ejemplo. Presupone ya tanto como éstas. Distingue una cosa de otra, informa, por tanto, a alguien que no sabe algo muy concreto. (Cfr. la observación: la filosofía no usa un lenguaje propedéutico, etc.)

Pues quien me describa cómo se adiestra a la gente para seguir una regla y cómo la gente reacciona correctamente a ello, usará en la misma descripción la expresión de una regla y presupondrá en mí su comprensión.

Así pues, hemos enseñado a alguien la técnica de multiplicar. Por consiguiente, empleamos expresiones de aquiescencia y rechazo. También le anotaremos, a veces, el *objetivo* de la multiplicación. «Si lo haces correctamente, has de obtener esto», podemos decirle.

Pero ¿puede replicar el alumno diciendo: «¿Cómo sabes esto? ¿Qué es lo que quieres, que siga la regla o que obtenga ese resultado? Puesto que ambas cosas no tienen por qué coincidir.» Bueno, no suponemos que el alumno pueda decir eso; suponemos que acepta la regla como válida por ambos lados. Que concibe cada uno de los pasos *y* la imagen de la operación —y, por tanto, el resultado de ella— como criterios de corrección, y que, si éstos no coinciden, cree en una confusión de los sentidos.

27. ¿Es ahora imaginable que alguien siga correctamente la regla y obtenga, sin embargo, diferentes resultados en diferentes ocasiones al multiplicar 15 × 13? Eso depende de *qué criterios* se admite que valgan para un seguimiento correcto. En la matemática el resultado mismo es un criterio de la corrección del cálculo. Es impensable, pues, seguir correctamente la regla y producir diferentes imágenes de la operación de cálculo.

La no-validez de la contradicción caracteriza la técnica de nuestro empleo de las funciones de verdad. Si permitimos que la contradicción valga en nuestros juegos de lenguaje, alteramos esa técnica —como si partiéramos de considerar una doble negación como afirmación. Y esa alteración sería significativa, dado que la técnica de nuestra lógica tiene que ver, en lo que respecta a su carácter, con la concepción de las funciones de verdad.

«Las reglas me obligan a algo», bueno, esto puede muy bien decirse, ya que lo que me parece que coincide con la regla no depende, ciertamente, de mi voluntad. Por eso puede suceder que me invente las reglas de un juego de tablero y encuentre, después, que en ese juego quien comienza *tiene que* ganar. Y algo parecido sucede cuando encuentro que las reglas llevan a una contradicción.

Ahora me veo obligado a reconocer que esto propiamente no es un juego.

'Las reglas de la multiplicación, una vez adoptadas, me obligan ahora a reconocer que ... × ... es igual a ...' Supongamos que me resultara desagradable aceptar esa proposición. ¿He de decir: «Bueno, esto proviene de ese tipo de adiestramiento. Las personas que están adiestradas así, condicionadas así, encuentran tales dificultades.»?

'¿Cómo se cuenta en el sistema decimal?'—«Escribimos 2 después de 1, 3 después de 2... ... 14 después de 13... 124 después de 123, *etc.*—Esto es una explicación para quien, si bien es verdad que había algo que no sabía, entendía, sin embargo, el 'etc.'. Y entenderlo no significa entenderlo como abreviatura; *no* significa que él vea ahora en espíritu una serie mucho más larga que la de mis ejemplos. Que lo entiende, es algo que se muestra en que ahora realiza ciertas aplicaciones, en que actúa *así* y dice *esto* en ciertos casos.

«¿Cómo contamos en el sistema decimal?»—... ... ...— Y bien ¿no es esto una respuesta?—Pero no para quien no entendía el 'etc.'. Pero ¿puede que nuestra explicación no se lo haya hecho comprensible? ¿Puede que no haya obtenido mediante ella la idea de regla?—Pregúntate cuáles son los criterios de que él haya ya obtenido esa idea.

¿Qué es lo que me obliga?—¿La expresión de la regla?—Sí; si he sido educado así alguna vez. Pero ¿puedo decir que me obliga a seguirla? Sí; si uno se imagina aquí a la regla, no como una línea a la que sigo, sino como un conjuro que nos mantiene encandilados.

((«puro sinsentido, y chichones...»))

28. ¿Por qué no ha de decirse que la contradicción, por ejemplo ésta: 'heterológico' ε heterológico ≡ ~ ('heterológico' ε heterológico), muestra una propiedad lógica del concepto 'heterológico'?

«'Bisílabo' es heterológico», o «'trisílabo' no es heterológico» son proposiciones de experiencia. En algún contexto puede que fuera importante descubrir si los adjetivos poseen o no las propiedades que designan. En ese caso se usaría en un juego de lenguaje la palabra «heterológico». Pero ¿ha de ser ahora «'h' ε h»

una proposición de experiencia? Evidentemente no lo es, y no la admitiríamos como proposición en nuestro juego de lenguaje sin haber descubierto la contradicción.

A '*h*'ε*h* ≡ ∼('*h*'ε*h*) podría llamárselo 'una contradicción verdadera'.—¡Pero esa contradicción no es, ciertamente, una proposición con sentido! De acuerdo, pero las tautologías de la lógica tampoco lo son.

«La contradicción es verdadera» quiere decir aquí: está demostrada; deducida de las reglas para la palabra «h». Su aplicación consiste en mostrar que «'*h*'» es una palabra que, inserta en 'ξε*h*', no produce una proposición.

«La contradicción es verdadera» quiere decir: Esto es realmente una contradicción, y, por tanto, no puedes usar la palabra «'*h*'» como argumento de 'ξε*h*'.

29. Explico un juego y digo: «Si haces esta jugada, yo juego *así*, si haces ésa, yo juego *así*.—Ahora ¡juega!» Y entonces él hace una jugada que yo también he de reconocer como tal, y si ahora quiero replicar según mis reglas, haga lo que haga, siempre resulta en desacuerdo con las reglas. ¿Cómo pudo suceder esto? Cuando establecí las reglas *dije* algo: Seguia una práctica acostumbrada. No preví lo que haríamos después, o sólo vi una posibilidad determinada. No fue diferente a decir a alguien: «Abandona el juego; con esas figuras no puedes dar mate», habiendo pasado por alto una posibilidad real de dar mate.

Los diferentes, mitad cómicos, revestimientos de la paradoja lógica sólo son interesantes en cuanto recuerdan a uno que una formulación seria de la paradoja es indispensable para entender con propiedad su función. La cuestión es: ¿Qué papel puede desempeñar un error así en un juego de lenguaje?

Se dan instrucciones a alguien, por ejemplo, de cómo ha de actuar en tal y tal caso; y esas instrucciones se revelan más tarde *sin sentido*.

30. La inferencia lógica es una parte de un juego de lenguaje. Y, ciertamente, quien lleva a cabo inferencias lógicas en el juego de lenguaje, sigue determinadas instrucciones, que fueron dadas en el aprendizaje del juego de lenguaje mismo. Si el peón, por ejemplo, construye una casa siguiendo órdenes concretas, tiene que abandonar de vez en cuando el aporte de materiales, etc., y realizar con signos sobre el papel ciertas operaciones; a continuación, de acuerdo con el resultado, vuelve a su trabajo.

Imagínate un proceso en el que alguien que lleva una carretilla se ha dado cuenta de que tiene que limpiar el eje de la rueda cuando resulta ya demasiado difícil empujar la carretilla. No quiero decir que él diga para sí mismo: «siempre que no pueda empujar la carretilla...». Sino que él *actúa* simplemente así. Y ahora se le ocurre gritar a otro: «La carretilla no anda; ¡limpia el eje!», o también: «La carretilla no anda. Así que hay que limpiar el eje.» Esto, ahora, es una inferencia. Aunque no una lógica, por supuesto.

¿Puedo decir ahora: «La inferencia no-lógica puede demostrar erróneamente; la inferencia lógica no»?

¿Es correcta la inferencia lógica cuando ha sido hecha de acuerdo con las reglas; o cuando ha sido hecha de acuerdo con reglas *correctas*? ¿Sería falso decir, por ejemplo, que de $\sim p$ ha de inferirse siempre *p*? Pero ¿por qué no decir mejor: que una regla así no daría a los signos '$\sim p$' y '*p*' su significado habitual?

Esto puede entenderse así, diría yo: que las reglas de inferencia dan significado a los signos porque son reglas de uso de esos

signos. Que las reglas de inferencia forman parte de la determinación del significado de los signos. En este sentido, las reglas de inferencia no pueden ser falsas o correctas.

En la obra, A ha medido la longitud y anchura de una superficie y da a B la orden: «Trae 15 × 18 losas.» B está adiestrado para multiplicar y para contar una cantidad de losas correspondiente al resultado[5].

Naturalmente, la proposición '15 × 18 = 270' no necesita pronunciarse nunca.

Podría decirse: experimento-operación de cálculo son polos entre los que se mueven acciones humanas.

31. Condicionamos a una persona de tal y tal manera; después actuamos sobre ella mediante una pregunta; y recibimos un signo numérico. Lo usamos después para nuestros fines y se revela práctico. Eso es el cálculo.—¡Todavía no! Podía tratarse de un procedimiento muy *útil*, pero no tiene por qué ser lo que llamamos 'calcular'. Como si alguien imaginara que, para los mismos fines que vale hoy nuestro lenguaje, se emitieran sonidos que no constituyeran, sin embargo, lenguaje alguno.

Al cálculo pertenece que todos los que calculan correctamente produzcan la misma imagen de la operación de cálculo. Y 'calcular correctamente' no significa calcular con el entendimiento claro, o con toda tranquilidad, sino calcular *así*.

Toda demostración matemática proporciona un nuevo pie al edificio matemático. (Pensaba en los pies de una mesa.)

---

[5] Cfr. *Philosophische Untersuchungen*, § 2, § 8. (*Nota de los editores.*)

32. Me he preguntado: ¿No es también matemática una matemática de aplicación puramente fantástica?—Pero la cuestión es: ¿No la llamamos, quizá, 'matemática' sólo porque aquí existen pasos, puentes, entre la aplicación fantástica y la no fantástica? Esto es: ¿diríamos que poseen una matemática gentes que usan el cálculo, el operar con signos, *sólo* para fines ocultos?

33. Pero ¿no es, entonces, incorrecto decir: que lo *esencial* de la matemática es que forma conceptos?—Pues la matemática es, ciertamente, un fenómeno antropológico. Podemos considerar eso, por tanto, como lo esencial para una gran parte de la matemática (de lo que se llama 'matemática') y decir, sin embargo, que ello no desempeña papel alguno en otros terrenos. Esta idea, ciertamente, no dejará de tener influjo por sí misma en quienes están aprendiendo a ver así la matemática. La matemática es, pues, una familia; pero no quiere decir que nos vaya a dar igual todo lo que se incorpore a ella.

Podría decirse: si no comprendieras *ninguna* proposición matemática mejor de lo que comprendes el axioma multiplicativo[6], no comprenderías entonces la matemática.

34. Aquí hay una contradicción. Pero no la vemos y hacemos inferencias a partir de ella. Por ejemplo, proposiciones matemáticas; y falsas. Pero aceptamos esas inferencias.—Y si se derrumba ahora un puente, calculado por nosotros, buscamos otra causa para ello, o decimos que Dios así lo ha querido. ¿Era falso, pues, nuestro cálculo; o no era cálculo alguno?

Ciertamente, si observamos como exploradores a gente que actúa así, quizá digamos: esta gente no calcula en absoluto. O: en sus cálculos hay un elemento de arbitrariedad que diferencia la esencia de su matemática de la de la nuestra. Y no podríamos negar, sin embargo, que esa gente posee una matemática.

[6] Esto es: axioma de elección. (*Nota de los editores.*)

¿Qué reglas ha de dar el rey[7] para eludir en lo sucesivo la embarazosa situación en que le ha puesto su prisionero?—¿Qué clase de problema es ése?—Seguramente es parecido a éste: ¿Cómo he de cambiar las reglas de este juego para que no surjan tales y tales situaciones? Y ésta es una tarea matemática.

Pero ¿puede ser, entonces, una tarea matemática hacer que la matemática sea matemática?

¿Puede decirse: «Sólo después de que se solucionó este problema comenzaron los seres humanos a calcular propiamente»?

35.¡¿Qué clase de seguridad es ésta que se basa en que nuestros bancos, en general, nunca llegarán a verse acosados de hecho por todos sus clientes a la vez; y, sin embargo, se produciría la bancarrota si ello sucediera?! Bueno, se trata de *otra clase* de seguridad diferente de la más primitiva; pero es, ciertamente, una seguridad.

Quiero decir: si se descubriese ahora realmente una contradicción en la aritmética; bueno, eso sólo demostraría que una aritmética con una contradicción *tal* puede rendir muy buenos servicios; y sería mejor modificar nuestro concepto de seguridad necesaria, que decir que no se trataba aún propiamente de auténtica aritmética.

«¡Pero ésa no es la seguridad ideal!»—¿Ideal para qué fin?

Las reglas de la inferencia lógica son reglas del *juego de lenguaje*.

---

[7] Probablemente se refiere al rey que estableció la ley de que todo el que llegara a su ciudad debería exponer sus intenciones y ser ahorcado si mentía. Un sofista dijo que venía para ser ahorcado de acuerdo con esa ley. (*Nota de los editores.*)

36. ¿Qué *tipo* de proposición es ésta: «La clase de los leones no es un león, pero la clase de las clases sí es una clase»? ¿Cómo se verifica? ¿Cómo podría usarse?—Por lo que veo, sólo como proposición gramatical. Para hacer que alguien repare en que la palabra «león» se usa de modo fundamentalmente diferente al nombre de un león; mientras que el nombre genérico «clase», de modo semejante a la designación de una de las clases, la clase de los leones pongamos.

Puede decirse que la palabra «clase» se usa reflexivamente, aun cuando se admita, por ejemplo, la teoría russelliana de los tipos. Puesto que también en ella se aplica reflexivamente.

Decir, en este sentido, que la clase de los leones no es un león, etc., es semejante, ciertamente, a que alguien dijera que tomó una «o» por una «a» cuando confundió una bola con una bala.

El cambio repentino en la contemplación de la imagen de un cubo y la imposibilidad de considerar a 'león' y 'clase' como conceptos comparables.

La contradicción dice: «Ten cuidado...».

Pero ¿y si se da el nombre de «león» a un león concreto (al rey de los leones, pongamos)? Dirás en ese caso: pero está claro que en la proposición «león es un león» la palabra «león» se usa de dos modos diferentes. (*Logisch-philosophische Abhandlung*[8].) Pero ¿no puedo tomarlos como *un* mismo tipo de uso?

Pero si se usara de ese modo la proposición «león es un león»: ¿no repararía en nada aquel a quien yo hago reparar en la diversidad del uso de ambos «león»?

---

[8] Cfr. *Tractatus* 3.323. (*Nota de los editores.*)

Puede examinarse un animal para ver si es un gato. Pero el concepto gato en ningún caso puede examinarse así.

Aunque «la clase de los leones no es un león» parece un absurdo, al que sólo por educación pudiera asignarse un sentido; no quiero, sin embargo, considerar así esa proposición, sino como una proposición auténtica, con tal sólo de que esté considerada correctamente. (O sea, no como en *Log. Phil. Abh.*) Mi consideración es aquí, por así decirlo, otra. Eso significa, sin embargo, que digo: hay también un juego de lenguaje con *esa* proposición.

«La clase de los gatos no es una clase.»—¿Por qué sabes tú eso?

La fábula de los animales dice: «El león fue a pasear con el zorro», no un león con un zorro; tampoco el león tal y tal con el zorro tal y tal. Y aquí sucede realmente como si la especie león se considerara como un león. (No es, como dice Lessing[9], como si en lugar de un león cualquiera se tomara uno determinado. «El tejón Grimmbart» no significa: un tejón con el nombre de «Grimmbart».)

Imagina un lenguaje en el que la clase de los leones se denomina «el león de todos los leones», la clase de los árboles, «el árbol de todos los árboles», etc.—Porque la gente se imaginara que todos los leones forman *un* gran león. (Decimos: «Dios ha creado al hombre.»)
Entonces alguien podría formular la paradoja de que no hay un número determinado de todos los leones. Etc.

Pero ¿sería imposible, quizá, contar y calcular en un lenguaje así?

[9] *Abhandlungen über die Fabeln*, en G. E. Lessing, *Fabeln*, 1759. (*Nota de los editores.*)

37. Podría uno preguntarse: ¿Qué papel puede desempeñar en la vida humana una proposición como «Miento siempre»? Y aquí pueden imaginarse diferentes cosas.

38. ¿Es una inferencia lógica la traducción a cms. de una longitud en pulgadas? «El cilindro tiene 2 pulgadas de largo. Por tanto tiene aproximadamente 5 cm. de largo.» ¿Es esto una inferencia *lógica*?

Sí pero ¿no es algo arbitrario una regla? ¿Algo que yo *establezco*? Y ¿podría establecer que la multiplicación de 18 × 15 *no* diera 270?—¿Por qué no?—Pero entonces no se hubiera producido de acuerdo a la regla que establecí primero y cuyo uso había ejercitado.

¿Es también una regla lo que se sigue de una regla? Y si no, ¿qué clase de proposición he de decir que es?

«Al ser humano... le resulta imposible reconocer un objeto como diferente de sí mismo[10].» Bueno, si tuviera idea de cómo se hace, ¡lo intentaría inmediatamente! Pero si nos resulta imposible reconocer un objeto como diferente de sí mismo, ¿es posible, entonces, reconocer dos objetos como mutuamente diferentes? Por ejemplo, tengo ante mí dos sillas y reconozco que son *dos*. Pero en circunstancias puedo creer también que sólo es *una*; y, en *este* sentido, puedo también tomar una por dos.—Pero ¡no por eso reconozco la silla como diferente de sí misma! Bien; pero, entonces, tampoco he reconocido las dos como mutuamente diferentes. Quien cree que puede hacer eso, y juega una especie de juego psicológico, traduce eso a un juego de gestos. Si tiene ante sí dos objetos señala con cada mano uno de ellos; como si quisiera indicar de los dos que son autónomos. Si tiene ante sí sólo un objeto, lo señala con ambas manos para indicar que no puede establecerse diferencia alguna entre él y él mismo.—Pero ¿por qué no puede jugarse el juego del modo contrario?

[10] Cfr. *supra*, Parte I, § 132. (*Nota de los editores.*)

39. Las palabras «correcto» y «falso» se usan en la enseñanza del proceder según una regla. La palabra «correcto» permite que el alumno siga. la palabra «falso» lo retiene. ¿Podría explicarse al alumno esas palabras diciendo en lugar de ellas: «Esto coincide con la regla; esto no»? Bueno, si posee un concepto de coincidencia. Pero ¿y si ese concepto ha de formarse primero? (Depende de cómo él reaccione ante la palabra «coincidir».)

No se aprende a seguir una regla, aprendiendo primero el uso de la palabra «coincidencia».

Más bien se aprende el significado de «coincidir», aprendiendo a seguir una regla.

Quien quiera comprender lo que significa: «seguir una regla», tiene que ser capaz él mismo de seguir una regla.

Si aceptas esa regla, *tienes que* hacer esto.» – Eso puede significar: la regla no te deja aquí dos caminos abiertos. (Una proposición matemática.) Pero lo que quiero decir es: la regla te conduce como un pasillo de fuertes muros. Pero puede objetarse en contra que la regla podría interpretarse de cualquier modo. La regla está ahí como una orden; y *actúa* también como una orden.

40. Un juego de lenguaje: traer algo *diferente;* traer lo *mismo.* Bueno, podemos imaginarnos cómo se juega. Pero ¿cómo puedo explicárselo a alguien? Puedo darle *esta* instrucción. Pero ¿cómo sabe él, después, lo que ha de traer la próxima vez como 'lo mismo', con qué derecho puedo decir que ha traído lo correcto o lo falso?—Sé, efectivamente, que, en ciertos casos, se abalanzará gente sobre mí con signos de desaprobación.

Y ¿esto quiere decir, entonces, que la definición de 'lo mismo' sería, quizá, lo mismo es lo que todos o la mayoría de los seres humanos coinciden en ver así? Desde luego que no.

Pues, naturalmente, no utilizo la coincidencia de los seres humanos para constatar la identidad. ¿Qué criterio usas, entonces? Ninguno en absoluto.

Usar sin justificación una palabra no significa usarla sin derecho a hacerlo.

El problema del juego de lenguaje anterior existe también, naturalmente, en éste: Tráeme algo rojo. Pues ¿cómo sé que algo es rojo? ¿Por la coincidencia del color con una muestra?—¿Con qué derecho digo: «Sí, esto es rojo.»? Bueno, lo digo; y no puede justificarse. Y también para este juego de lenguaje, como para el anterior, resulta característico que se lleve a cabo con el tácito consentimiento de todos los seres humanos.

Una proposición irresuelta de la matemática es algo que no está reconocido ni como regla, ni como lo contrario de una regla, y que tiene la forma de un enunciado matemático.—Pero ¿es esa forma un concepto claramente circunscrito?

Imagina $\lim_{n \to \infty} \varphi n = e$ como una propiedad de una pieza musical (por ejemplo). Pero no *de tal modo*, naturalmente, que la pieza continuara sin fin, sino como una propiedad (propiedad *algebraica*, digamos) de la pieza, reconocible auditivamente.

Imagina ecuaciones usadas como ornamentos (dibujos de papeles de pared) y una comprobación, acto seguido, del tipo de curvas al que corresponden. Esta comprobación sería análoga a la de las propiedades contrapuntísticas de una pieza musical.

41. Una prueba que muestra que la figura '777' aparece en el desarrollo de π, pero que no muestra *dónde*[11]. Bien, así demostrada, esa 'proposición existencial', para ciertos fines, no sería *regla alguna*. Pero ¿no podría servir, por ejemplo, como medio de clasificación de reglas de desarrollo? Análogamente se demostraría, por ejemplo, que '777' no aparece en π^2, pero sí en $\pi \times e$, etc. La cuestión no es más que ésta: ¿Es razonable decir de la prueba en cuestión: que demuestra la existencia de '777' en ese desarrollo? Esto puede resultar simplemente equívoco. Se trata sólo del conjuro de la prosa, y sobre todo de la prosa russelliana, en la matemática.

¿Qué tiene de malo decir, por ejemplo, que Dios conoce *todos* los números irracionales? O: ¿que todos están ya ahí, aunque nosotros sólo conozcamos algunos? ¿Por qué esas imágenes no son inofensivas?

Bien miradas, encierran ciertos problemas.

Supongamos que los hombres desarrollan π más y más. Dios, omnisciente, sabe, por tanto, si antes del fin del mundo llegarán a la figura '777'. Pero ¿puede su *omnisciencia* decidir si los hombres *habrían* llegado a esa figura después del fin del mundo? No puede. Quiero decir: Tampoco Dios puede decidir sobre algo matemático más que por medio de la matemática. Tampoco para él puede la mera regla del desarrollo decidir lo que no decide para nosotros.

Ello podría expresarse así: una vez que se nos ha dado la regla del desarrollo, una *operación de cálculo* puede enseñarnos que '2' aparece en el quinto lugar de la cifra. ¿Habría podido saberlo Dios sin esa operación, simplemente por la regla de desarrollo? Yo diría: No.

---

[11] Cfr. Parte V, § 27. (*Nota de los editores.*)

42. Si yo dijera de la matemática que sus proposiciones forman conceptos, se trataría de algo *vago;* puesto que '2+2=4' forma un concepto en otro sentido que '$p \supset p$', '$(x) \cdot fx \supset fa$', o que el teorema de Dedekind. Y es que sucede que hay una familia de casos.

El concepto de la regla para la formación de una fracción decimal infinita no es —naturalmente— un concepto específicamente matemático. Es un concepto en conexión con una *actividad* estrictamente determinada de la vida humana. El concepto de esa regla no es más matemático que el de: seguir la regla. O también: este último no está definido con menor precisión que el concepto mismo de una regla así.—Efectivamente, la expresión de la regla y su sentido no son más que una parte del juego de lenguaje: seguir la regla.

En general, puede hablarse de tales reglas con el *mismo* derecho que de las acciones de seguirlas.

Se dice, ciertamente, «todo está ya en nuestro concepto» de la regla, por ejemplo; pero ello quiere decir: nos inclinamos a *esas* determinaciones del concepto. Pues ¡¿qué tenemos en la cabeza que contenga ya todas esas determinaciones?!

El número es, como dice Frege, una propiedad de un concepto —pero en la matemática es un distintivo de un concepto matemático. $\aleph_0$ es un *distintivo* del concepto de número cardinal; y la *propiedad* de una técnica. $2^{\aleph_0}$ es un distintivo del concepto de fracción decimal infinita, pero ¿de qué es una propiedad ese número? Esto es: ¿de qué tipo de concepto puede enunciársela empíricamente?

43. La demostración de la proposición me muestra lo que estoy dispuesto a apostar por la verdad de la proposición. Y

demostraciones diferentes pueden llevarme, en efecto, a apostar lo mismo.

Lo sorprendente, paradójico, es paradójico sólo en un contexto determinado, defectuoso, por así decirlo. Hay que ampliar ese contexto de modo que lo que parecía paradójico ya no lo parezca.

Si he demostrado que $18 \times 15 = 270$, con ello he demostrado también la proposición matemática que dice que por aplicación de ciertas reglas de transformación al signo '18×15' se obtiene el signo '270'.—Supongamos que los seres humanos, impedidos por alguna pócima de ver claramente o de recordar con claridad (por así decirlo ahora), no obtuvieran '270' de esa operación.—¿No es inútil una operación cuando no se puede predecir correctamente por ella lo que obtendrá alguien en circunstancias normales? Bueno, aunque lo sea, eso no muestra que la proposición '$18 \times 15 = 270$' sea la proposición de experiencia: en general, los seres humanos calculan *así*.

Por otra parte, no está claro que la coincidencia general de los que calculan sea un distintivo característico de todo lo que se denomina «calcular». Podría imaginarme que gentes que han aprendido a calcular, bajo determinadas circunstancias, por ejemplo bajo el influjo del opio, comenzaran a calcular de modo diferente unos de otros e hicieran uso de tales cálculos; y que no se dijera entonces que no calculan y que son irresponsables, sino que se aceptaran sus cálculos como un proceder legítimo.

Pero ¿no tendrían, al menos, que ser adiestrados para el mismo cálculo? ¿No pertenece *ello* al concepto del cálculo? Creo que podrían imaginarse también aquí divergencias.

44. ¿Puede decirse que la matemática enseña un método de investigación, un modo de planteamiento, matemático[12]? Bueno

[12] Cfr. *supra*, p. 322. (*Nota de los editores.*)

¿no puede decirse que ella me enseña, por ejemplo, a preguntar si un cuerpo determinado se mueve siguiendo una ecuación parabólica?—Pero ¿qué hace la matemática en ese caso? Sin ella, o sin los matemáticos, no habríamos llegado, ciertamente, a la definición de esa curva. Pero ¿era ya matemática definir esa curva? ¿Implicaría matemática que la gente, por ejemplo, examinara el movimiento de los cuerpos con el fin de saber si su trayecto puede representarse mediante la construcción de una elipse con una cuerda y dos clavos? ¿Habría ejercitado la matemática quien hubiera inventado este tipo de examen?

Ciertamente ha creado un nuevo *concepto*. Pero ¿lo hizo al modo que lo hace la matemática? ¿Fue al modo como la multiplicación $18 \times 15 = 270$ nos ofrece un nuevo concepto?

45. ¿*No* puede decirse, por tanto, que la matemática nos enseña a contar? Pero si nos enseña a contar, ¿por qué no también a comparar colores?

Está claro: quien nos enseña la ecuación de una elipse nos enseña un concepto nuevo. Pero quien nos demuestra que *esa* elipse y *esa* recta se cortan en ese punto, él también nos proporciona un nuevo concepto.

Enseñarnos la ecuación de una elipse es semejante a enseñarnos a contar. Pero también semejante a enseñarnos a plantear la cuestión: «¿hay aquí cien veces más bolas que allí?»

Si en un juego de lenguaje hubiera enseñado a alguien a plantear esa cuestión y un método para responderla ¿le habría enseñado matemática? ¿O sólo en el caso de que él hubiera operado con signos?

(Sería esto, quizá, como preguntar: «¿sería esto también una geometría, consistente *sólo* en los axiomas euclídeos?»)

Si la aritmética nos enseña a preguntar «¿cuántos?», ¿por qué no también a preguntar «¿cómo de oscuro?»?

Pero la cuestión «¿hay aquí cien veces más bolas que allí?» no es, ciertamente, una cuestión matemática. Y su respuesta, tampoco una proposición matemática. Una cuestión matemática sería: «¿Son 170 bolas cien veces más que 3 bolas?» (Y se trataría, además, de una cuestión de la matemática pura, no de la aplicada.)

¿He de decir que quien nos enseña a contar objetos, y cosas semejantes, nos proporciona nuevos conceptos, y *también* quien nos enseña la matemática pura con tales conceptos?

¿Es una nueva conexión conceptual un nuevo concepto? Y ¿produce la matemática conexiones conceptuales?

La palabra «concepto» es realmente demasiado vaga.

La matemática nos enseña a operar de una manera nueva con los conceptos. Y puede decirse, por ello, que cambia nuestro trabajo conceptual.

Pero sólo la proposición matemática demostrada o aceptada como postulado, no la problemática, hace eso.

46. Pero ¿no puede experimentarse matemáticamente? ¿Intentar, por ejemplo, a ver si doblando un papel cuadrado puede hacerse con él la cabeza de un gato, sin que se cuestionen, al hacerlo, las propiedades *físicas* del papel, su dureza, elasticidad, etc.? Se habla aquí de un intento. Y ¿por qué no de un experimento? Este caso es, ciertamente, semejante al de sustituir, a modo de ensayo, pares de números en la ecuación $x^2+y^2=25$, a

ver si se encuentra uno que satisfaga la ecuación. Y si se llega, por fin, a $3^2+4^2=25$ ¿es esa proposición, entonces, el resultado de un experimento? ¿Por qué se denominó, pues, un intento a ese proceder? ¿Lo llamaríamos también así si alguien solucionara siempre tales problemas a la primera, con total seguridad (con los signos de la seguridad), pero sin cálculo? ¿En qué consistiría aquí el experimentar? Supongamos que antes de que dé la solución se le aparece como visión.

47. Si una regla no te obliga es que no *sigues* regla alguna.

Pero ¿cómo he de seguirla, si puedo seguirla, ciertamente, como quiera?

¿Cómo he de seguir el indicador de caminos, si todo lo que haga es un seguimiento?

Pero el que todo pueda *interpretarse* (también) como un seguimiento, no quiere decir, sin embargo, que todo sea un seguimiento.

Pero ¿cómo interpretar, entonces, el maestro al alumno la regla? (Puesto que una cierta interpretación ha de darle.) Bueno, ¿cómo sino mediante palabras y adiestramiento?

(Esta es una idea importante.)

Y el alumno ha interiorizado la regla (*así* interpretada) cuando reacciona a ella de tal y tal modo.

Pero lo importante es *esto:* que esa reacción, que nos garantiza la comprensión, presupone como contexto determinadas circunstancias, determinadas formas de vida y de lenguaje. (Igual que, sin rostro, no hay expresión facial alguna.)

48. ¿Me obliga una línea a seguirla?—No; pero si me he decidido a usarla *así* como modelo, entonces me obliga.—No:

entonces me obligo *yo* a usarla así. Como si me aferrara a ella.—Pero lo importante aquí es, ciertamente, que puedo tomar y mantener de una vez por todas la decisión con la interpretación (general), digamos, y que no *interpreto* de nuevo a cada paso.

La línea, podría decirse, me sugiere cómo he de seguir. Pero esto, naturalmente, sólo es una imagen. Y si juzgo que me sugiere tal o tal cosa irresponsablemente, por así decirlo, entonces no habría de decir que la he seguido *como regla*.

«La línea me sugiere cómo he de seguir»: esto es sólo una paráfrasis de: ella es mi *última* instancia de cómo he de seguir.

49. Imagina que alguien sigue una línea como regla de esta manera: Toma un compás y lleva una de sus puntas a lo largo de la regla, mientras la otra punta traza *la* línea que sigue a la regla. Y mientras recorre así la regla-línea, abre y cierra el compás, con gran exactitud al parecer, mirando siempre a la regla, como si *ella* determinara su actuación. Quienes lo contemplamos no vemos regularidad de ningún tipo en ese abrir y cerrar. Por eso tampoco podemos aprender de él su modo de seguir la línea. Creemos, sin embargo, que la línea le ha sugerido lo que hace.

En este caso diríamos (quizá) realmente: «El modelo parece *sugerirle* cómo ha de proceder. Pero no se trata de regla alguna.»

50. Supón que alguien sigue la serie «1, 3, 5, 7, ...» escribiendo la serie $2x+1$; y que se preguntara: «pero ¿hago siempre lo mismo, o algo diferente cada vez?»

Quien un día y otro promete: «mañana dejaré de fumar» ¿dice cada día lo mismo, o cada día algo diferente?

¿Cómo decidir si hace siempre lo mismo, dado que la línea le sugiere cómo ha de proceder?

51. ¿Lo que yo quería decir no era que: Sólo la imagen total de la aplicación de la palabra «mismo», en su urdimbre con las aplicaciones de las demás palabras, puede decidir si él aplica la palabra como nosotros?

¿No hace siempre lo mismo, a saber, dejar que la línea le sugiera cómo ha de proceder? Pero ¿y si dice que la línea le sugiere unas veces una cosa y otras otra? ¿No podría decir, entonces, que en *un* sentido siempre hace lo mismo, aunque, desde luego, no sigue una regla? Y ¿no puede decir también quien sigue una regla que, en cierto sentido, hace cada vez algo diferente? Así que el que haga siempre lo mismo o siempre algo diferente no determina si sigue o no una regla.

Sólo *así* puede describirse el proceso de seguir una regla: describiendo de otro modo lo que hacemos para ello.

¿Tendría sentido decir: «Si él hiciera cada vez algo *diferente* no diríamos que sigue una regla»? Eso no tiene *ningún* sentido.

52. Seguir una regla es un juego de lenguaje determinado. ¿Cómo puede describirse? ¿Cuándo decimos que él ha comprendido la descripción?—Hacemos tal y tal cosa; si él responde, entonces, de tal y tal modo, es que ha entendido el juego. Y ese 'tal y tal cosa' y 'de tal y tal modo' no contiene ningún «y así sucesivamente».—O: si yo usara en la descripción un «y así sucesivamente» y se me preguntara lo que ello significa, tendría que explicarlo nuevamente mediante una enumeración de ejemplos; o quizá mediante un gesto. Y consideraría, entonces, un signo de comprensión que él, por ejemplo, repitiera el gesto con expresión de inteligencia en la cara, y que actuara de tal y tal modo en casos concretos.

«Pero ¿no llega más allá la comprensión que todos los ejemplos?» Una expresión muy curiosa y enteramente natural.

Cuando se enumeran ejemplos y luego se dice «y así sucesivamente», esta última expresión no se explica igual que los ejemplos.

Pues el «y así sucesivamente» podría, por una parte, sustituirse por una flecha que mostrara que el final de la serie de ejemplos no tiene por qué significar el final de su aplicación. Por otra parte. «y así sucesivamente» significa también: es suficiente, me has entendido; no necesitamos más ejemplos.

Si sustituimos la expresión por un gesto, podría suceder que la gente sólo captara nuestra serie de ejemplos como debiera (sólo la siguieran correctamente), si al final hacemos este gesto. Sería muy parecido, pues, al de señalar un objeto, o lugar.

53. Supón que una línea me sugiere cómo he de seguirla; esto es, cuando la recorro con los ojos me dice algo así como una voz interior: Sigue *así*. Y bien, ¿cuál es la diferencia entre este proceso de seguir una especie de inspiración y el de seguir una regla? Puesto que ambos no son lo mismo. En el caso de la inspiración *espero* instrucciones. No podré enseñar a otro mi 'técnica' para seguir una línea. A no ser que le enseñe una especie de escucha, de receptividad, etc. Pero entonces no puedo exigir, naturalmente, que él siga la línea como yo.

Podría uno imaginarse también una enseñanza así de un modo de calcular. Según él, los niños pueden calcular cada uno a su manera; con tal sólo de que escuchen la voz interior y la sigan. Calcular así sería como componer música.

Pues ¿no pertenece al seguimiento de una regla la técnica (la *posibilidad*) de adiestrar a otro en él? Y por medio de ejemplos, además. Y el criterio de su comprensión ha de ser la coincidencia de las acciones individuales. O sea, no como en la instrucción en la receptividad.

54. ¿Cómo sigues la regla?—«Lo hago *así:* ...» y entonces siguen ejemplos y explicaciones generales.—¿Cómo sigues la voz de la línea?—«Dirijo mi mirada a ella, aparto todo pensamiento, etcétera, etc.»

'No diría que siempre me sugiere algo distinto, si la siguiera como regla.' ¿Puede decirse esto? «Hacer lo mismo» está en conexión con «seguir la regla».

55. ¿Puedes imaginarte la audición absoluta cuando no la tienes? ¿Puedes imaginártela *cuando* la tienes?—¿Puede imaginarse un ciego el ver el rojo? ¿Puedo imaginármelo *yo*? Puedo imaginarme que reacciono espontáneamente de tal y tal modo cuando no lo hago? ¿Puedo imaginarlo mejor cuando lo estoy haciendo?

Pero ¿puedo jugar el juego de lenguaje si no reacciono así?

56. Uno no siente que haya que estar siempre esperando el aviso de la regla. Al contrario. No estamos en tensión por lo que nos vaya a decir ahora, sino que siempre nos dice lo mismo, y hacemos lo que nos dice.

Podría decirse: lo que hacemos al seguir una regla lo vemos bajo el punto de vista: *siempre lo mismo.*

Podría decirse a quien uno comienza a adiestrar: «Mira, hago siempre lo mismo:...».

57. Cuando decimos: «La línea me sugiere esto *como regla:* siempre lo mismo.» Y por otra parte: «Siempre me vuelve a sugerir lo que tengo que hacer; no es una regla.»

En el primer caso significa: no tengo ya otra instancia para saber lo que tengo que hacer. La regla lo hace ella sola; sólo tengo que seguirla (y seguimiento no hay más que *uno*). No siento, por ejemplo: es extraño que la línea siempre me diga algo.

La otra proposición dice: No sé lo que voy a hacer; la línea me lo dirá.

Los calculadores-prodigio, que llegan al resultado correcto, pero no saben decir cómo. ¿Hemos de decir: ellos no calculan? (Una familia de casos.)

Estas cosas están entretejidas con mayor finura de la que vislumbran toscas manos.

58. ¿No puedo *creer* que sigo una regla? ¿No se da ese caso?
Y ¿no puedo también creer que no sigo *ninguna* regla y seguir una, sin embargo? ¿No habría nada a lo que llamar *así* también?

59. ¿Cómo puedo explicar la palabra «mismo»?—Bien, por ejemplos. Pero ¿es eso *todo*? ¿No hay una explicación más profunda; o no ha de ser más profunda, ciertamente, la *comprensión* de la explicación?—Bien ¿tengo yo mismo una comprensión más profunda? ¿*Tengo* yo más de lo que doy en la explicación?
¿Por qué, entonces, el sentimiento de que tengo más de lo que puedo decir?
¿Es que interpreto lo no limitado como longitud que va más allá de toda longitud? (La licencia no limitada como licencia para algo sin límites.)

La imagen que acompaña a lo sin límites es la de algo tan grande que no podemos ver su final.

El uso de la palabra «regla» está implicado en el uso de la palabra «mismo».

Considera: ¿Bajo qué circunstancias dirá el explorador: La palabra «...» de esta tribu quiere decir lo mismo que nuestro «y así sucesivamente»? Imagina detalles de la vida y del lenguaje de esta tribu que justificaran que el explorador diga eso.

«¡Sé, ciertamente, lo que quiere decir 'mismo'!»—No dudo de ello; yo lo sé también.

60. «La línea me sugiere...» Aquí el énfasis está sobre lo *inaprehensible* del sugerir. Justamente sobre el hecho de que no hay *nada* entre la regla y mi acción.

Pero se podría imaginar que alguien multiplica, multiplica correctamente, con tales sentimientos: que repite siempre: «¡No sé; ahora la regla me sugiere de repente *esto*!», y que nosotros contestamos: «Naturalmente; estás procediendo de pleno acuerdo con la regla.»

Seguir una regla: esto puede contrastarse de varios modos. Entre otros, el explorador describirá también las circunstancias bajo las cuales un individuo de esa tribu no quiere decir de sí mismo que sigue una regla. Aunque en este o aquel contexto parezca así.

Pero ¿no podría suceder también que calculáramos como de hecho calculamos (coincidiendo todos, etc.) y tuviéramos a cada paso el sentimiento, sin embargo, de ser conducidos por la regla como por encanto; sorprendidos, quizá, de que coincidamos? (Pensando en la deidad, acaso, para esa coincidencia.)

¡En esto ves nada más lo mucho que hay ahí de la fisonomía de lo que en la vida cotidiana llamamos «seguir una regla»!

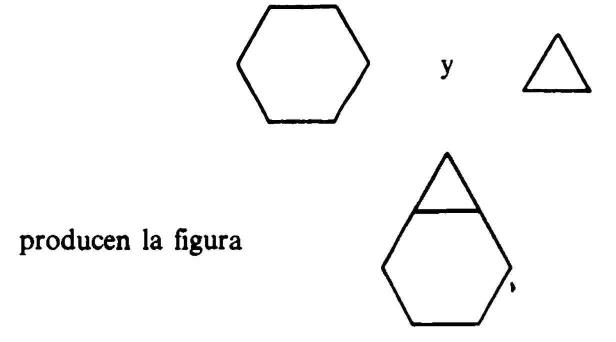
Se sigue '*mecánicamente*' la regla. Se compara uno, pues, con un mecanismo.

«Mecánicamente», esto es: sin pensar. Pero ¿sin pensar *del todo*? Sin *reflexionar*.

El explorador podría decir: «Siguen reglas, pero no se parece en nada a como nosotros lo hacemos.»

«Me sugiere, injustificadamente, esto o esto» quiere decir: no te puedo enseñar *cómo* sigo la línea. No presupongo que tú la seguirás como yo, aunque la sigas.

61. Una adición de formas, en la que se funden ciertos miembros, desempeña en nuestra vida un papel insignificante. —Como cuando



Pero si esto fuera una operación *importante*, quizá tuviéramos otro concepto usual de la adición aritmética.

Nos resulta natural considerar asunto de la geometría, no de la física, el hecho de que pueda hacerse un bote, un sombrero, etc., doblando un trozo cuadrado de papel (siguiendo ciertas reglas). Pero ¿no es la geometría, así entendida, una parte de la física? No; separamos la geometría de la física. La posibilidad geométrica, de la física. Pero ¿y si se las dejara juntas? ¿Si se dijera simplemente: «Si haces esto y esto y esto con el trozo de papel, resultará *esto*»? o que hay que hacer podría ofrecerse en rima. ¿No es posible que alguien no diferencie en absoluto entre ambas posibilidades? Como, por ejemplo, un niño que aprende esa técnica. No sabe, ni piensa tampoco en ello, si esos resultados del doblar son siquiera posibles, dado que el papel se estira, se deforma de tal y tal modo, o *no* se deforma.

Y ¿no sucede lo mismo en la aritmética? ¿Por qué no ha de poder aprender a calcular la gente sin un concepto de lo que es un hecho matemático y uno físico? La gente sólo sabe que siempre resulta esto si pone cuidado y hace lo que se le ha enseñado.

Imaginemos que mientras que calculamos cambiaran bruscamente las cifras en el papel. Que un 1 se convirtiera de repente en un 6, luego en un 5, luego en un 1 de nuevo, etc. Y quiero suponer que eso no modificara nada en el cálculo, dado que en el momento que leyera una cifra, para calcular con ella o para aplicarla, se convertiría de nuevo en aquella que tenemos ante nosotros en *nuestro* cálculo. Durante el cálculo se vería cómo cambian las cifras; pero estamos instruidos para no preocuparnos por ello.

Naturalmente, este cálculo, aunque no hagamos el supuesto anterior, podría llevar a resultados útiles.

Calculamos aquí estrictamente según reglas y, sin embargo, no *tiene por qué* salir ese resultado.—Supongo que no apreciamos ningún tipo de legaliformidad en el cambio de las cifras.

Quiero decir: Podría considerarse realmente este modo de calcular como un experimento y decir, por ejemplo: «Intentemos esto: a ver qué surge ahora, si aplico esta regla.»

O también: «Hagamos este experimento: escribamos las cifras con una tinta de tal composición... y calculemos según la regla...»

Ahora podrías decir, naturalmente: «En ese caso no es calcular manipular cifras según reglas.»

«Sólo calculamos cuando tras el resultado hay un tener que.»—¿Pero si no conocemos ese tener que, está, a pesar de ello, en la oposición de cálculo? O ¿no calculamos cuando lo hacemos con toda ingenuidad?

¿Qué decir *de esto:* No calcula quien, cuando le resulta unas veces esto, otras lo otro, y no puede encontrar ningún fallo, se resigna a ello y dice: eso muestra precisamente que existen ciertas circunstancias, aún desconocidas, que influyen en el resultado?

Esto podría expresarse así: no calcula aquel a quien la operación de cálculo le descubre una conexión causal.

A los niños no sólo se les adiestra en el cálculo, sino también en una toma de postura completamente determinada frente a un fallo en el cálculo[13].

Lo que digo viene a que la matemática es *normativa.* Pero «norma» no significa lo mismo que «ideal».

62. La introducción de una nueva regla de inferencia puede considerarse como paso a un nuevo juego de lenguaje. Me imagino uno, por ejemplo; en el que una persona dice '$p \supset q$', otra 'p' y una tercera saca la conclusión.

[13] [Variante:] ...frente a una desviación de la norma. (*Nota de los editores.*)

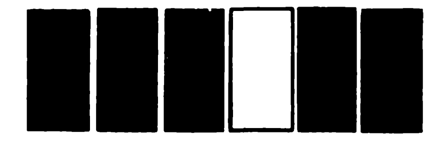
63. ¿Es posible observar que una superficie está coloreada de rojo y azul, y no observar que es roja? Imagina que se usa una especie de adjetivo de color para cosas que son mitad rojas, mitad azules: Se dice que son 'bu'. ¿No podría alguien estar entrenado para observar si algo es bu; o si es también rojo? Sólo sabría decir: «bu» o «no bu». Y de la primera manifestación nosotros deduciríamos que el objeto es en parte rojo.

Me imagino que la observación ocurre a través de un tamiz psicológico, que sólo deja pasar, por ejemplo, el hecho de que la superficie sea azul-blanca-roja (el tricolor francés), o no lo sea.

Si tomamos ahora una observación concreta, la de que la superficie es roja en parte, ¿cómo puede seguirse lógicamente de lo anterior? La lógica no puede decirnos lo que tenemos que observar.

Alguien cuenta manzanas en una caja; cuenta hasta 100. Otro dice: «bueno, en cualquier caso hay, pues, 50 manzanas en la caja» (eso es todo lo que le interesa). Esa es, ciertamente, una conclusión lógica; pero ¿no es también una experiencia concreta?

64. Varias personas observan una superficie dividida en cierto número de bandas. Los colores de las bandas cambian, al mismo tiempo todos, cada minuto.



Ahora los colores son: rojo, verde, azul, blanco, negro, azul.
Se observa:

rojo · azul ⊃ negro · ⊃ · blanco.

Se observa también:

$$\sim \text{verde} \supset \sim \text{blanco}$$

y alguien saca la conclusión:

$$\sim \text{verde} \supset \text{rojo} \cdot \text{azul} \cdot \sim \text{negro}.$$

Y estas implicaciones son 'implicaciones materiales' en el sentido de Russel.

Pero ¿se puede *observar*, pues, que

$$r \cdot a \supset n \cdot \supset \cdot b?$$

¿No se observan *composiciones* de color, por ejemplo $r \cdot a \cdot n \cdot b$; y se deduce entonces esa proposición?

Pero, al contemplar una superficie ¿no puede interesar la cuestión de si se pintará de verde o no de verde: y si ve ahora: $\sim v$, ha de prestar atención al color concreto de la superficie?

Y ¿no podría interesar a alguien esta combinación de colores: $r \cdot a \supset n \cdot \supset \cdot b$? Si él, por ejemplo, estuviera enseñado, olvidando todo lo demás, a contemplar la superficie sólo bajo ese punto de vista. (Bajo determinadas circunstancias podría resultar indiferente a los seres humanos que ciertos objetos sean rojos o verdes; pero importante, que tengan uno de esos colores, o un tercero. Y en ese caso podría haber una palabra de color para «rojo o verde».)

Pero si puede observarse que

$$r \cdot a \supset n \cdot \supset \cdot b$$

y

$$\sim v \supset \sim b,$$

entonces se puede observar también, y no simplemente inferir, que

$$\sim v \supset r \cdot a \cdot \sim n.$$

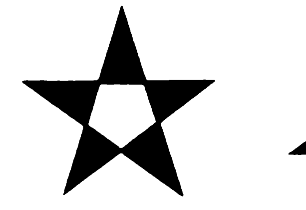
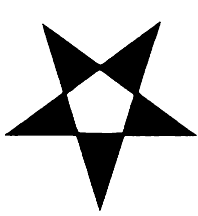
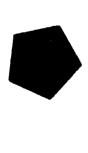
Si éstas son tres observaciones, entonces ha de ser posible también que la tercera no coincida con la conclusión lógica de las dos primeras.

¿Puede imaginarse, por tanto, que alguien, al observar una superficie, vea (como bandera, por ejemplo) la combinación rojo-negro, pero que, si intenta ver *una* de ambas mitades, en vez de rojo vea azul? Bien, tú lo has descrito, precisamente.—Sería como si alguien mirara un grupo de manzanas y le pareciera siempre como dos grupos de dos manzanas cada uno, pero, en cuanto intentara reunirlas con la mirada, le parecieran 5. Se trataría de un fenómero muy curioso. Y no es ninguno de cuya posibilidad tengamos noticia.

Recuerda que un rombo, visto como losange, no parece un paralelogramo. Pero no porque sus lados opuestos no parezcan paralelos, sino porque no reparamos en ese paralelismo.

65. Podría imaginarme que alguien dice que ve una estrella roja y amarilla, pero que no ve nada amarillo, porque ve la estrella, por así decirlo, como una *combinación* de partes coloreadas, que no consigue separar.

El tiene ante sí figuras como éstas, por ejemplo


Preguntado si ve un pentágono rojo, diría «sí»; preguntado si ve uno amarillo: «no». Igualmente dice que ve un triángulo azul, pero no uno rojo.—Habiendo llamado su atención, diría quizá: «Sí, ahora me doy cuenta; no había visto así la estrella.»

Y, así, podría ser que le pareciera que no pueden separarse los colores de la estrella, porque no pueden separarse sus formas.

No puede aprender a abarcar con la mirada la geografía de un paisaje quien se mueve por ella tan despacio que cuando avanza un trecho ya ha olvidado el otro.

66. ¿Por qué hablo siempre de que la regla me obliga; por qué no de que puedo *querer* seguirla? Ya que esto es tan importante.

Pero tampoco quiero decir que la regla me obligue a actuar así, sino que me posibilita atenerme a ella y dejar que me obligue.

Y quien juega un juego, por ejemplo, se atiene a sus reglas. Y resulta interesante el hecho de que los seres humanos establezcan reglas por diversión y se atengan luego a ellas.

Mi pregunta era propiamente: «¿Cómo puede uno atenerse a una regla?»[14] Y la imagen que podría rondarle a uno la cabeza en este caso sería la de un pequeño trozo de balaustrada por el que he de dejarme guiar más allá de donde la balaustrada alcanza. [Pero ¡no *hay* nada ahí; pero no es que no haya *nada* ahí!] Pues si pregunto «cómo *puede* uno...», eso quiere decir que hay algo ahí que me resulta *paradójico;* o sea, una imagen me produce confusión.

«No había pensado en absoluto que eso es también rojo; sólo lo había visto como una parte del ornamento multicolor.»

---

[14] Cfr. Parte VI, § 47: «Pero resulta curioso que al hacerlo yo no pierda el significado de la regla.» (*Nota de los editores.*)

La inferencia lógica es una transición que se justifica si sigue un determinado paradigma, y cuya legitimidad no depende de nada más.

67. Decimos: «Si realmente seguís la regla al multiplicar, TIENE QUE resultar lo mismo.» Bueno, si se trata sólo del modo de hablar, un tanto histérico, del lenguaje universitario, no tiene por qué interesarnos mucho.

Pero se trata de la expresión de una actitud ante la técnica de cálculo, que se manifiesta en nuestra vida por todas partes. El énfasis del tener-que corresponde sólo a la inexorabilidad de esa actitud, tanto ante la técnica de cálculo, cuanto ante las innumerables técnicas semejantes.

La necesidad matemática es solo otra expresión del hecho de que la matemática forma conceptos.

Y los conceptos sirven para comprender. Corresponden a un tratamiento determinado de los estados de cosas.

La matemática forma una red de normas.

68. Es posible ver cómo el complejo está formado de A y B, sin ver A ni B. Es posible también llamar al complejo «complejo de A y B» y pensar que esa denominación remite ahora a una suerte de parentesco de ese todo con A y con B. Es posible, pues, decir que se ve el complejo de A y B, pero no A ni B. Algo así como si pudiera decirse que hay aquí un amarillo rojizo, pero ni rojo ni amarillo.

¿Puedo ahora tener ante mí A y B, y ver ambos, pero observar sólo A y B? Bueno, en cierto sentido eso es posible. Y lo imaginé, en efecto, de modo que al observador le interesara un determina-

do aspecto; por ejemplo, que tuviese presente un determinado tipo de paradigma, que estuviera implicado en una determinada rutina de uso.—Y del mismo modo que pudo adoptarse a A ∨ B, también puede hacerlo con A · B. Repara sólo en A · B, y no, por ejemplo, en A. Estar adaptado a A ∨ B significa, podría decirse, reaccionar con el concepto 'A ∨ B' ante tal y tal situación. Y, naturalmente, del mismo modo puede hacerse con A · B.

Si decimos: a alguien sólo le interesa A · B y, pase lo que pase, sólo discrimina «A · B» o «∼(A · B)»; entonces puedo imaginar que él discrimina «A · B» y a la pregunta «¿Ves B?» responde «No, veo A · B». Como muchos, que ven A · B, no admitirán que ven A ∨ B.

69. Pero 'ver toda roja' y 'ver toda azul' la superficie son, ciertamente, experiencias, y, ciertamente, decimos que nadie puede tenerlas a la vez.

¿Y si alguien nos asegurara que ve realmente toda roja y, a la vez, toda azul esa superficie? Tendríamos que decir: «No haces que te comprendamos.»

Entre nosotros la proposición «1 pie = ... cm.» es intemporal. Pero también podría imaginarse el caso de que el pie y el metro, como medidas, se alteraran algo progresivamente, y hubiera que compararlas cada vez para traducir una a otra.

Pero ¿no ha sido determinada experimentalmente entre nosotros la relación de las longitudes del metro y del pie? Cierto; pero el resultado se estampó en una regla.

70. ¿Hasta qué punto puede decirse que una proposición de la aritmética nos proporciona un concepto? Bueno, no la interpre-

temos como proposición, como respuesta a una pregunta, sino como una conexión conceptual aceptada de algún modo.

La equiparación de 25^2 y 625 me proporciona, podría decirse, un nuevo concepto. Y la demostración muestra cómo se explica esa igualdad. «Proporcionar un nuevo concepto» sólo puede significar introducir un nuevo uso conceptual, una nueva praxis.

«¿Cómo puede separarse la proposición de su demostración?» Esta pregunta revela, ciertamente, una concepción falsa.

La demostración es un *entorno* de la proposición.

'Concepto' es un concepto vago.

71. No en todo juego de lenguaje hay algo que pueda denominarse «concepto».

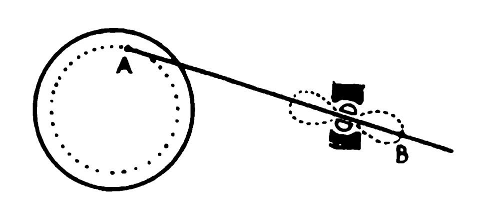
Concepto es algo así como una imagen con la que se confrontan objetos.

¿Hay conceptos en el juego de lenguaje (2)[15]? Pero éste podría ampliarse fácilmente de modo que «baldosa», «cubo», etc., se convirtieran en conceptos. Por ejemplo, mediante una técnica de descripción o de representación de esos objetos. Naturalmente, no existe un límite preciso entre juegos de lenguaje que trabajan con conceptos, y otros. Lo importante es que la palabra «concepto» remite a un tipo de adminículo en el mecanismo de los juegos de lenguaje.

---

[15] *Philosophische Untersuchungen*, § 2; *supra*, p. 288. (*Nota de los editores.*)

72. Observa un mecanismo. Este por ejemplo:



Mientras que el punto *A* describe un círculo, *B* describe la figura de un ocho. Ahora escribimos esto como una proposición cinemática.

Accionando el mecanismo, su movimiento me demuestra la proposición; como lo haría una construcción sobre el papel. La proposición corresponde, por ejemplo, a una imagen del mecanismo, en la que están dibujadas las trayectorias de los puntos *A* y *B*. En cierto sentido, pues, es una imagen de aquel movimiento. Retiene aquello de lo que me convence la *demostración*. O de lo que me persuade.

Si la demostración registra el proceder según la regla, produce con ello un nuevo concepto.

Al producir un nuevo concepto me convence de algo. Pues es esencial a ese convencimiento que el proceder según esa regla haya de producir siempre la misma imagen. (La 'misma', a saber, de acuerdo con nuestras reglas usuales de comparar y copiar.)

Tiene que ver con esto el que pueda decirse que la demostración habría de mostrar la existencia de una relación interna. Pues la relación interna es la operación que produce una estructura a partir de otra, considerada equivalente a la imagen de esa transición misma, de modo ahora que la transición hecha de acuerdo a esa serie de imágenes es *eo ipso* una transición de acuerdo a aquellas reglas operacionales.

Al producir un concepto la demostración me convence de algo. Aquello de lo que me convence viene expresado en la proposición que ha demostrado.

Problema: ¿Significa el adjetivo «matemático» siempre lo mismo: cuando hablamos de conceptos 'matemáticos', de proposiciones 'matemáticas' y de demostraciones matemáticas?

¿Qué tiene que ver la proposición demostrada con el concepto creado por la demostración? O ¿qué tiene que ver la proposición demostrada con la interna relación demostrada por la demostración?

La imagen (imagen de la demostración) es un instrumento de convencimiento.

Está claro que se puede aplicar también la proposición matemática indemostrada; sí, incluso la falsa.

La proposición matemática me dice: ¡Procede así!

73. «Si la demostración nos convence, también hemos de estar convencidos, entonces, de los axiomas.» No como lo estamos de proposiciones empíricas; no es éste su papel. En el juego de lenguaje están excluidos de la verificación por la experiencia. No son proposiciones de experiencia, sino principios de juicio.

Un juego de lenguaje: ¿Cómo he de imaginar uno en el que aparezcan axiomas, demostraciones y proposiciones demostradas?

Quien en la escuela oye por primera vez algo sobre la lógica, se convence inmediatamente cuando alguien le dice que una proposición se implica a sí misma, o cuando oye el principio de contradicción, o el de tercio excluso.—¿Por qué se convence

inmediatamente de estas cosas? Bueno, esas leyes se acomodan perfectamente al uso del lenguaje que le resulta tan familiar.

Entonces aprende, por ejemplo, a demostrar proposiciones más complicadas de la lógica. Se le enseñan las demostraciones y vuelve a convencerse; o él mismo inventa una demostración.

Así, aprende nuevas técnicas de inferencia. Y también a qué hay que achacar los fallos, en caso de que aparezcan.

La demostración le convence de que ha de atenerse a la proposición, a la técnica que ésta prescribe; pero también le muestra cómo puede atenerse a la proposición sin correr peligro de entrar en conflicto con una experiencia.

74. Cualquier demostración en la matemática aplicada puede concebirse como una demostración de la matemática pura, que demuestra que *esa* proposición se sigue de *esas* proposiciones, o puede obtenerse de ellas mediante tales y tales operaciones, etc.

La demostración es una *andadura* determinada. Al describirla no se mencionan causas.

Actúo siguiendo la demostración.—Pero ¿cómo?—De acuerdo a la proposición demostrada.

La demostración me ha enseñado, por ejemplo, una técnica de aproximación. Pero ha demostrado, ciertamente, *algo;* me ha convencido de algo. *Eso* expresa la proposición. Dice lo que voy a hacer ahora siguiendo la demostración.

La demostración pertenece al trasfondo de la proposición. Al sistema en el que actúa la proposición.

Mira, *así* 3 y 2 dan 5.
¡Fíjate en ese proceso!

Cualquier proposición de experiencia puede servir como regla si —como a una pieza de una máquina— se la verifica, inmoviliza, de modo que toda la representación gire ahora en torno a ella y ella se convierta en una parte del sistema de coordenadas e independiente de los hechos.

«Así sucede cuando esa proposición se deduce de ésas. Has de admitirlo.»—Lo que admito es que llamo *así* a un proceso como ése.

INDICE ANALITICO